

Prova scritta del 13.03.2018

(tempo: 2 ore per gli studenti di *Calcolo delle Probabilità e Statistica*;
2,5 ore per gli studenti di *Matematica per l'Analisi dei Dati*)

Esercizio 1

Di seguito sono riportati i dati relativi all'età (x) e al peso (y) per un campione di 19 bambini.

Bambini	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14	B15	B16	B17	B18	B19
x	3	10	9	7	4	7	6	5	5	6	2	8	10	4	3	8	9	6	10
y	15	60	35	25	22	42	40	25	24	32	12	36	46	20	20	50	45	25	42

1. Determinare i valori dei tre quartili per i dati relativi al peso.
2. Disegnare, per i dati relativi al peso, un boxplot, avente come baffi il 15° e l'85° percentile.
3. Si considerino esclusivamente i dati relativi ai bambini B1, B6 e B16. Calcolare le medie e le varianze sia per i dati relativi all'età che per quelli relativi al peso.
4. Calcolare, sempre in riferimento ai tre bambini del punto precedente, il coefficiente di correlazione e valutare se esiste qualche correlazione tra i dati, spiegando di che tipo di correlazione si tratta.
5. Determinare la retta di regressione (sempre in riferimento ai suddetti tre bambini) e calcolare il peso previsto per un bambino di 11 anni e mezzo.

Esercizio 2

Il gioco con i dadi "Craps" viene giocato con due dadi. Ogni volta che il paio di dadi viene lanciato ne vengono sommati i due numeri ottenuti. Il giocatore vince immediatamente se ottiene un punteggio di 7 o 11; perde immediatamente se ottiene 2, 3 o 12. Se il giocatore ottiene 4, 5, 6, 8, 9 o 10, mantiene questo suo punteggio e ripete indefinitamente il lancio dei dadi fino a quando vince, ottenendo nuovamente il suo punteggio, oppure perde, ottenendo un 7.

1. Qual è la probabilità di vincere immediatamente?
2. Sapendo che il giocatore ha ottenuto come punteggio 8, qual è la probabilità di vincere?
3. Qual è la probabilità di vincere?
4. Sapendo che il giocatore ha ottenuto un 5, dopo quanti lanci dei due dadi, ci si aspetta di finire il gioco?
5. Dato che il banco si è reso conto di vincere molto poco, vuole modificare le regole del gioco. Per fare ciò decide di far perdere immediatamente il giocatore anche in altri casi oltre al 2, al 3 e al 12, scegliendo tra 4, 5, 6, 8, 9 e 10, in modo che la probabilità di perdere immediatamente sia esattamente del 25%. Quali alternative proponete?

Esercizio 3

Un programmatore ha progettato un sistema per il riconoscimento visivo di gatti. È stato stimato che il sistema commette un errore di riconoscimento nel 15% dei casi. In una cartella sono memorizzate 20 immagini di gatti.

1. Qual è il valore atteso di errori commessi dal sistema e qual è la probabilità che si presentino esattamente un tale numero di errori?
2. Qual è la probabilità che il sistema commetta più di 2 errori?
3. Si calcoli la precedente probabilità utilizzando l'approssimazione normale, spiegando il perché della differenza con il valore esatto.
4. Qual è il numero minimo di immagini di gatti da sottoporre al sistema perché ne riconosca correttamente almeno 50 con una probabilità superiore al 50%? (Si usi l'approssimazione normale).
5. Si vogliono migliorare le performance del sistema in modo che la probabilità di riconoscere 20 gatti su 20 sia maggiore del 95%. Quanto dovrebbe valere al massimo la percentuale di errori commessi?

Esercizio 4 (Soltanto per gli studenti di *Matematica per l'Analisi dei Dati*)

Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax+a & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -2ax+4a & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Determinare per quale valore del parametro a la funzione f rappresenta una densità di probabilità.
2. Determinare la funzione di ripartizione della variabile aleatoria associata ad f .
3. Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria associata ad f .