

Esercitazione sulle Variabili Aleatorie (1)

Esercizio 1. Scrivere un programma in un linguaggio di programmazione a scelta che simuli l'andamento dei guadagni da parte dell'Agenzia delle Dogane e dei Monopoli durante una giornata del gioco del lotto. Si assuma per semplificare il problema che un giocatore possa fare soltanto le seguenti giocate:

Giocata 1: un numero su una fissata ruota (viene pagato 11 volte la posta);

Giocata 2: un ambo su una fissata ruota (viene pagato 250 volte la posta);

Giocata 3: un terno su una fissata ruota (viene pagato 4500 volte la posta);

Giocata 4: una quaterna su una fissata ruota (viene pagato 120000 volte la posta);

Giocata 5: una cinquina su una fissata ruota (viene pagato 6000000 di volte la posta).

Si calcoli la **frequenza relativa delle vittorie** per ciascuna tipologia di giocata sul numero totale per quella particolare giocata (ad esempio se alla fine della giornata ci sono state 10000 giocate e 100 giocate vincenti attraverso la Giocata 1, la frequenza relativa per la Giocata 1 sarà $100/2000$). Si calcoli inoltre il **guadagno totale da parte dell'Agenzia delle Dogane e dei Monopoli**, al variare di N tra 1000, 10 mila, ..., 10 milioni. Il GuadagnoTotale è dato dal numero di giocate giornaliere (N) moltiplicato per la somma puntata (10 euro) a cui sottrarre il guadagno da parte dei giocatori.

Nella tabella riportiamo le frequenze relative e il guadagno totale per una esecuzione.

N	Giocata 1	Giocata 2	Giocata 3	Giocata 4	Giocata 5	Guadagno Totale
10^3	0.055	0	0	0	0	8790
10^4	0.0505	0.003	0	0	0	73890
10^5	0.0569	0.0027	$5.0 \cdot 10^{-5}$	0	0	694820
10^6	0.054815	0.002685	$6.5 \cdot 10^{-5}$	0	0	6866570
10^7	0.0555195	0.002461	$7.75 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	0	62505700

Ad esempio, nella **prima riga** si trova una frequenza relativa di 0.055 per le giocate di tipo 1, ovvero ci sono state 11 vittorie su 200 giocate di tipo 1. Pertanto il **guadagno totale** da parte dell'agenzia è stato di

$$10 \cdot 1000 - 11 \cdot 110 = 10000 - 1210 = 8790.$$

Ad esempio, nella **seconda riga** si trova una frequenza relativa di 0.0505 per le giocate di tipo 1, ovvero ci sono state 101 vittorie su 2000 giocate di tipo 1; e una frequenza relativa di 0.003 per le giocate di tipo 2, ovvero ci sono state 6 vittorie su 2000 giocate di tipo 2. Pertanto il **guadagno totale** da parte dell'agenzia è stato di

$$10 \cdot 10000 - 101 \cdot 110 - 6 \cdot 2500 = 100000 - 11110 - 15000 = 73890.$$

Problema: Si calcoli la probabilità di vittoria e la si confronti con la frequenza relativa. Si calcoli il valore atteso di vincita da parte dell'Agenzia delle Dogane e dei Monopoli per ciascuna delle 5 tipologie di giocate singolarmente e il valore atteso di vincita giornaliero con un milione di giocate. Cosa possiamo osservare guardando ai valori attesi teorici e alle distribuzioni statistiche ottenute dal calcolatore?

Calcoliamo come esempio la **probabilità di fare una quaterna**.

Casi possibili. Vengono estratti 5 numeri.

$$\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \mid \omega_i \in \{1, 2, \dots, 90\}\}$$

$$|\Omega| = \binom{90}{5} = \frac{90!}{5! (90-5)!}$$

Casi favorevoli. A = “escono i 4 numeri puntati”

$$|A| = \binom{4}{4} \binom{86}{1} = \frac{86!}{1! (86-1)!}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{86!}{1! (86-1)!} \cdot \frac{5! (90-5)!}{90!} = \frac{1}{511\,038} \approx 1.9568 \times 10^{-6}$$

Nella tabella 1 si riportano i risultati per ciascuna delle tipologie di giocate.

Tabella 1: Probabilità di vittoria per ogni giocata.

	Giocata 1	Giocata 2	Giocata 3	Giocata 4	Giocata 5
Probabilità di vittoria	0.055556	0.0024967	8.5121×10^{-5}	1.9568×10^{-6}	2.2754×10^{-8}

Per calcolare il valore atteso di vincita da parte dell'Agenzia delle Dogane e dei Monopoli per ogni giocata dobbiamo procedere in modo simile a come abbiamo fatto a lezione, ricordando che quello che perde il giocatore lo guadagna l'Agenzia delle Dogane e dei Monopoli. Calcoliamo come esempio il **valore atteso per chi punta 10 euro su una quaterna**.

I valori che può assumere la nostra variabile aleatoria X_4 sono: quanti soldi guadagno (x_v) in caso di successo e quanti soldi perdo (x_p) nel caso opposto. Ricordiamo che in caso di successo si vince 120000 volte la posta.

$$x_v = 10 \cdot 120000 - 10 = 1199990$$

$$x_p = -10$$

La probabilità $P(X_4 = x_v)$ è $P(\text{“fare quaterna”})$ calcolata in precedenza.

$$P(X_4 = x_v) = \frac{\binom{4}{4} \binom{86}{1}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{511038}$$

$$P(X_4 = x_p) = \frac{511037}{511038}$$

$$E(X_4) = x_p \cdot P(X_4 = x_p) + x_v \cdot P(X_4 = x_v) = -10 \left(\frac{511037}{511038} \right) + 1199990 \frac{1}{511038} = -7.65$$

Quindi “in media” un giocatore perde 7.65 euro e l’Agenzia delle Dogane e dei Monopoli ne guadagna la stessa quantità. Se indichiamo con G_4 il guadagno da parte dell’Agenzia sulla quaterna, abbiamo che $G_4 = -X_4$, quindi $E(G_4) = E(-X_4) = -E(X_4) = 7.65$.

Per un milione di giocate al giorno, di cui 200000 di tipo 1, 200000 di tipo 2, 200000 di tipo 3, 200000 di tipo 4, 200000 di tipo 5, il valore atteso del guadagno G dell’Agenzia delle Dogane e dei Monopoli sarà

$$\begin{aligned} E(G) &= E(200000 \cdot G_1 + 200000 \cdot G_2 + 200000 \cdot G_3 + 200000 \cdot G_4 + 200000 \cdot G_5) \\ &= 200000 \cdot E(G_1) + 200000 \cdot E(G_2) + 200000 \cdot E(G_3) + 200000 \cdot E(G_4) + 200000 \cdot E(G_5) = \\ &= 200000 \cdot 3.89 + 200000 \cdot 3.76 + 200000 \cdot 6.17 + 200000 \cdot 7.65 + 200000 \cdot 8.63 = 6020000 \end{aligned}$$

	Giocata 1	Giocata 2	Giocata 3	Giocata 4	Giocata 5	Guadagno totale giornalero (10 ⁶ giocate)
Valore atteso di vincita singola giocata	3.89	3.76	6.17	7.65	8.63	6 020 000