



# **AUTOMI CELLULARI : UN MODELLO COMPUTAZIONALE PER FENOMENI COMPLESSI**

**Salvatore Di Gregorio**

Dipartimento di Matematica & Centro per il Calcolo ad Alte Prestazioni  
Università della Calabria, Arcavacata, I-87036 Rende (CS)

***GRUPPO di RICERCA EMPEDOCLES***  
***toti.dig@unical.it***

## **Contenuti:**

- **Cenni storici: il problema dell'acentrismo**
- **Definizioni formali**
- **Proprietà ed applicazioni degli Automi Cellulari**
- **Modellizzazione e simulazione di fenomeni complessi**
- **Qualche conclusione**



### IL PROBLEMA DI VON NEUMANN

**FINE ANNI 40** Nell'ambito degli studi della Cibernetica emerge la necessità di un explicatum del paradigma dell'acentrismo in termini di modelli computazionali in relazione alle problematiche dell'autoriproduzione degli esseri viventi e dell'organizzazione del sistema nervoso centrale.

in che modo e con quali limiti un sistema complesso,  
le cui costituenti elementari evolvono solo in base ad un'informazione locale,  
può perseguire obiettivi globali

**ciò presuppone**

<b>un tipo di descrizione del sistema in esame in cui si possano individuare componenti interagenti fra di loro</b>		<b>una visione del calcolo non più di tipo gerarchico, ma bensì acentrato-parallelo</b>
---	--	---

-  Un esempio, una ferita si cicatrizza con il contributo delle cellule sopravvissute, che si duplicano e differenziano senza un piano gerarchico, per rimpiazzare le cellule morte.



# il problema dell'acentrismo

## PROBLEMA

Ammassare nella scacchiera i tondini in alto:

o	o		o	o	
	o			o	o
		o			
o		o		o	
			o	o	o
		o		o	

**I soluzione**

o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	o	o	o		

Approccio gerarchico

Intelligenza esterna in possesso dell'informazione globale sulla situazione

Schermo intero ▾  
Chiudi schermo intero



# il problema dell'acentramento

## II Soluzione

Approccio gerarchico ma con componenti avente ognuna informazione globale sulla situazione

o	o		o	o	
	o			o	↑ o
		↑ o			
↑ o		↑ o		↑ o	
			↑ o	↑ o	↑ o
		↑ o		↑ o	

o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	↑ o
		← o		← o	
				↑ o	
				↑ o	

o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	o	o	o		



# il problema dell'acentrismo

## III Soluzione

Approccio acentrato: gli individui sono miopi, conoscono solo ciò che sta loro vicino, intelligenza ed informazione sono esclusivamente locali

Regole:

- \* Alle righe dispari viene dato il verso privilegiato verso sinistra, alle pari verso destra
- \* Il tondino si sposta nella casella in alto, se questa è libera, altrimenti si può spostare nel verso privilegiato della riga se la casella è libera e nessun tondino la può occupare spostandosi verso l'alto.

**1**

o	o		← o	o	
	→ o			o	↑ o
		↑ o			
↑ o		→ o		o	
			↑ o	o	↑ o
		↑ o		→ o	

**2**

o	o	o		← o	o
	o	→ o		→ o	
↑ o				← o	
		↑ o	↑ o		↑ o
		← o		↑ o	
					↑ o

**3**

o	o	o	o		← o
o	→ o		→ o		o
		↑ o	o	↑ o	o
				→ o	
	↑ o				↑ o



# il problema dell'acentramento

4

o	o	o	o	o	
o	o	o	o	o	↑ o
			← o		← o
	↑ o			↑ o	o

5

o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	
	← o	o		← o	↑ o
					o

6

o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o		← o	o		
					↑ o

7

o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	o		← o		← o

8

o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	o	o		← o	

9

o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	o	o	o		



## AUTOMA A STATI FINITI (definizione generale)

$$A = \langle I, S, U, \sigma, \delta \rangle$$

➤  $I, S, U$  insiemi finiti d'Ingresso, degli Stati e d'Uscita

➤  $\sigma : I \times S \rightarrow S$  funzione di transizione di stato

➤  $\delta : I \times S \rightarrow U$  funzione di uscita

### tempo discreto

➤ passo 0  $i_0 \in I \rightarrow s_0 \in S$

➤ passo 1  $s_1 \in S \rightarrow u_1 \in U$



## automa a stati finiti: un esempio

- Si vuole descrivere tramite un automa finito (a stati finiti)

$$A = \langle I, S, U, \sigma, \delta \rangle$$

il sistema di illuminazione di un'aula con due file di  $n$  lampade, ciascuna fila è collegata ad un pulsante .

- $I = \{p_1, p_2\}$        $p_1$  ( $p_2$ ) = viene premuto il primo (secondo) pulsante

- $S = \{00, 01, 10, 11\}$       **0** fila spenta, **1** fila accesa, il primo valore individua la prima fila, il secondo la seconda fila

- $U = \{0, 1, 2\}$       **0** buio, **2** massima intensità di luce, **1** mezza intensità

$\sigma$	$p_1$	$p_2$	$\delta$	$p_1$	$p_2$
00	10	01	00	1	1
01	11	00	01	2	0
10	00	11	10	0	2
11	01	10	11	1	1



# automa a stati finiti: un esercizio

Si specifichi un automa finito per la somma di due interi positivi qualsiasi in binario, tenendo conto che non è possibile fornire in ingresso consecutivamente i due valori a meno di porre limiti sulla dimensione dei numeri.

**Suggerimento:** è necessario individuare opportuni vincoli formali, affinché l'automa finito funzioni correttamente.

## POSSIBILE SOLUZIONE

$I = \{00, 01, 10, 11\}$  le cifre binarie dei due interi aventi lo stesso peso posizionale, a partire da quelle a più basso valore, vengono date in ingresso, **ciò comporta il vincolo che sia eguagliata la lunghezza dei due numeri aggiungendo un numero opportuno di 0 a sinistra (non altera il valore del numero) al numero con meno cifre binarie.**

$S = \{0, 1\}$  riporto 0, riporto 1 **ciò comporta il vincolo di stato iniziale 0 e che le ultime due cifre in ingresso siano 00 per tenere conto del riporto nel caso sia 1.**

$U = \{0, 1\}$  0, 1 risultato della somma senza riporto delle cifre binarie in ingresso a cui va aggiunta la cifra rappresentante lo stato.



$\sigma$	00	01	10	11
0	0	0	0	1
1	0	1	1	1

$\delta$	00	01	10	11
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Es.  $10101 + 1110 = 100011$

Sequenze (da destra verso sinistra): coppie di cifre binarie in ingresso

stati

uscita

0 1 0 1 0 1

0 1 1 1 0 0 0

1 0 0 0 1 1

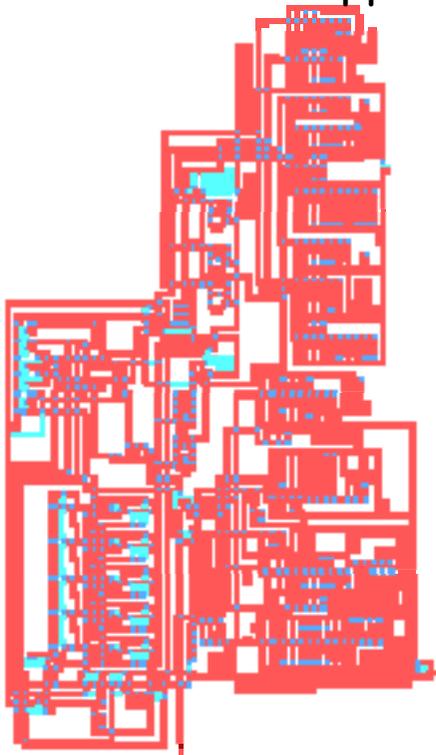
0 0 1 1 1 0



## L'automa autoriproducentesi di von Neumann

Quali sono le proprietà di un sistema non banalmente autoriproducentesi?

Von Neumann pensò ad un modello continuo, basato su un sistema di equazioni differenziali di tipo diffusivo in uno spazio in cui fluttuano liberamente un robot ed innumerevoli copie dei pezzi di cui egli stesso è composto; il robot è programmato ad "agganciare" i pezzi nello spazio ed ad assemblarli opportunamente per costruire una copia di se stesso.



A causa delle difficoltà di gestire il sistema di equazioni di diffusione von Neumann cambiò tipo di approccio.

Egli considerò un sistema discreto nel tempo e nello spazio: una scacchiera infinita, dove ciascuna cella contiene un automa finito il cui input è dato dagli stati di celle vicine.

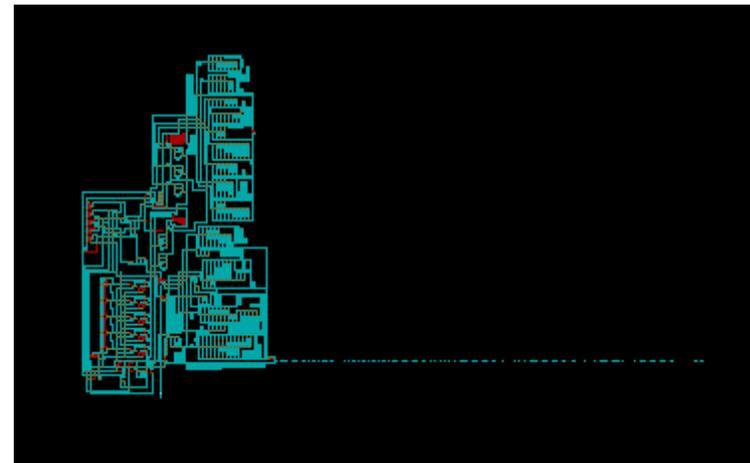
Von Neumann costruì una struttura con un automa finito a 29 stati, in grado di costruire una copia di se stesso in un'altra area della scacchiera.

Tale struttura è una specie di Macchina di Turing, estesa sul piano cellulare.



## L'automa autoriproducentesi di von Neumann

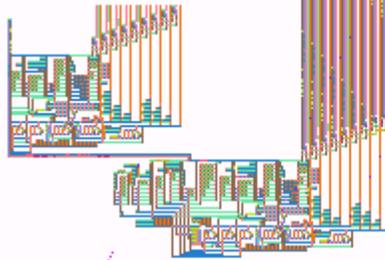
- Tale sorta di Macchina di Turing può essere descritta come composta da due parti: un attuatore  $A$  ed un nastro  $N$ .
- Queste due parti  $A+N$  si evidenziano perché rappresentano quella regione finita dello spazio cellulare infinito, le cui celle non sono in uno stato neutro detto quiescente (v. blank).
- L'attuatore è in grado di cambiare lo stato delle celle intorno anche a distanza, sviluppando delle estroflessioni tramite le quali riesce a creare una copia di se stesso in un'altra regione dello spazio cellulare, cambiando opportunamente lo stato delle celle quiescenti.
- L'attuatore  $A$  opera sulla base di un piano codificato nel nastro  $N$  costruendo una copia di se stesso  $A'$ , dopodiché copia il nastro  $N$ , costruendo una copia  $N'$  per  $A'$  ed attiva il nuovo complesso  $A'+N'$



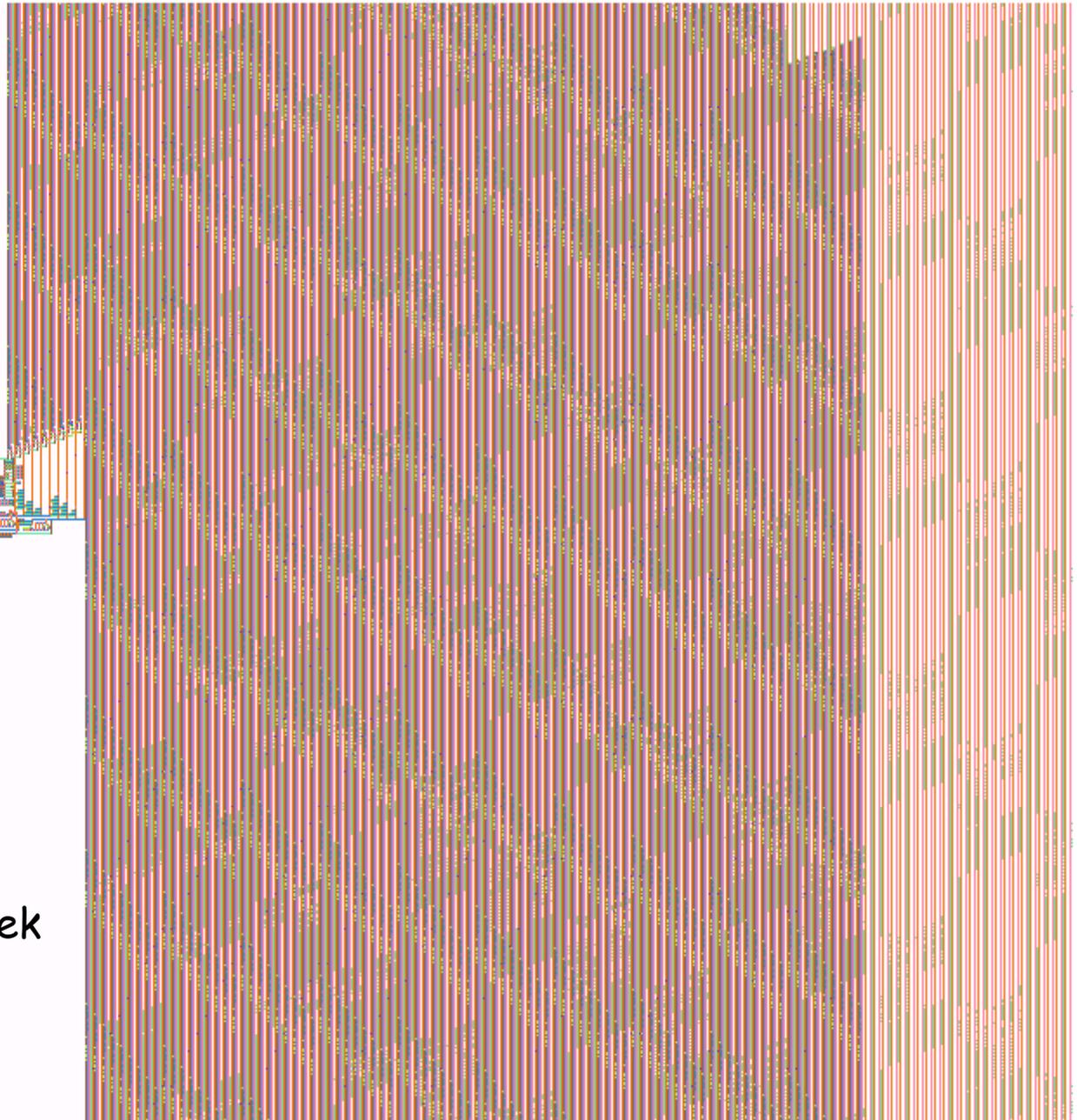


# L'automa autoriproducentesi di von Neumann

L'automa auto-  
riproducentesi  
fu chiamato  
Automa  
Cellulare.



Le proprietà formali  
dell'automa cellulare  
autoriproducentesi  
coincidono con quelle  
del DNA scoperto nel  
1955 da Watson & Creek





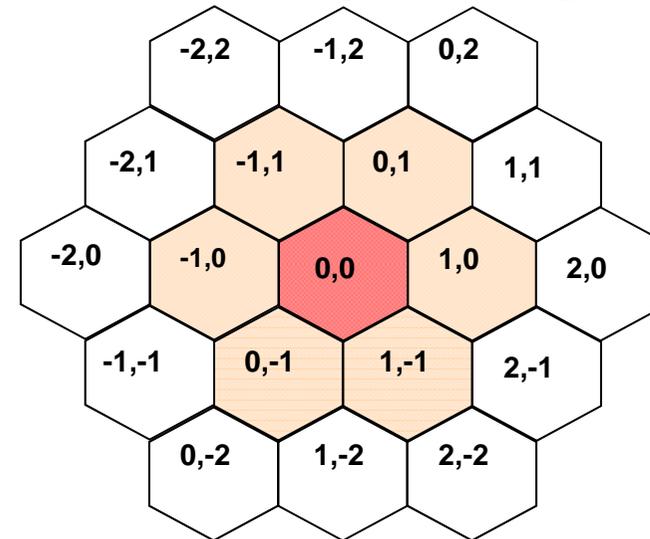
## Automati Cellulari (AC)

Intuitivamente un Automa Cellulare (AC) omogeneo può essere immaginato come uno spazio  $d$ -dimensionale, diviso in celle di misura uniforme, ciascuna incorporante un identico automa finito, il così detto automa elementare (ae), i cui stati rappresentano le caratteristiche proprie della cella.

L'input per ciascuna cella è dato dagli stati delle celle vicine; le condizioni di vicinato sono determinate da una relazione geometrica invariante nel tempo e nello spazio.

-2, 2	-1, 2	0, 2	1, 2	2, 2
-2, 1	-1, 1	0, 1	1, 1	2, 1
-2, 0	-1, 0	0, 0	1, 0	2, 0
-2, -1	-1, -1	0, -1	1, -1	2, -1
-2, -2	-1, -2	0, -2	1, -2	2, -2

vicinanza di von Neumann



vicinanza esagonale

Al tempo  $t=0$ , le celle sono in uno stato arbitrario (condizioni iniziali), l'AC evolve cambiando gli stati degli automi elementari a passi discreti di tempo, applicando la funzione di transizione  $\tau: S^m \rightarrow S$  simultaneamente a tutte le celle.

$S$  è l'insieme finito degli stati dell'ae ed  $m$  è il numero di celle nel vicinato.



## Automati Cellulari (AC)

### ALCUNE CONSIDERAZIONI

- Sicuramente von Neumann vedeva il suo AC più che come modello di calcolo (e lo è senz'altro e per giunta di calcolo parallelo!), come un sostitutivo (anche se in una forma piuttosto debole) ad una equazione che classicamente risolve un sistema fisico.
- Mentre una equazione descriverà direttamente lo stato del nostro universo per un qualsiasi istante di tempo da noi scelto fra gli infiniti di un continuum, l'AC è in grado di specificare la sua configurazione (le celle in stato non quiescente ed ovviamente il loro stato) ad un qualsiasi passo di calcolo, però partendo da una configurazione iniziale, attraverso il calcolo di tutte le configurazioni intermedie per arrivare alla configurazione del sistema al passo da noi prescelto.
- In più, scandalosamente, non vi è interesse a definire quando un AC termina il suo calcolo; quindi apparentemente sono estranee o per lo meno secondarie preoccupazioni di tipo computazionale.
- Ciò comporta problemi formali quando si voglia dimostrare se l'AC è in grado di simulare una macchina di Turing Universale.



## Definizione formale di Automa Cellulare

$$A = \langle Z^d, X, S, \tau \rangle$$

- $Z^d = \{ \text{L'insieme di celle identificate dai punti a coordinate intere in uno spazio Euclideo } d\text{-dimensionale} \}$
- $X = \langle \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1} \rangle$  è la relazione (o indice) di vicinanza, un insieme finito di vettori  $d$ -dimensionali, che definisce l'insieme  $V(X, i)$  di vicini della cella  $i$  (chiamata anche cella centrale)  $i = \langle i_1, i_2, \dots, i_d \rangle$  come segue:  
sia  $m = \#X$ , allora  $V(X, i) = \langle i + \xi_0, i + \xi_1, \dots, i + \xi_{m-1} \rangle$   
ove  $\xi_0$  è sempre il vettore nullo,

spesso si adotta la convenzione di individuare le celle del vicinato con un solo indice, il cui valore varia da  $0$  a  $m-1$ , con  $0$  la cella centrale:  $s_0, s_1, \dots, s_{m-1}$  rispettivamente gli stati della cella centrale, del vicino  $1$  fino al vicino  $m-1$ ;

molte definizioni di AC non includono la cella centrale nel vicinato, i valori dell'indice allora vanno da  $1$  a  $m-1$  oppure da  $0$  a  $m-2$

- $S$  è l'insieme finito degli stati dell'automa elementare.
- $\tau: S^m \rightarrow S$  è la funzione di transizione deterministica dell'automa elementare, questa può anche essere probabilistica, non deterministica oppure mista: deterministica/probabilistica.



## Definizione formale di Automa Cellulare

■  $C = \{c \mid c: \mathbb{Z}^d \rightarrow S\}$  è l'insieme delle possibili assegnazioni di stato ad  $A$  ed è chiamato l'insieme delle configurazioni dell'AC;

$c(i)$  è lo stato della cella  $i$ .

■ Tale definizione formale si può estendere banalmente a tipi differenti di spazio (ad es. spazi riemanniani et c.), diverse topologie (ad es. il toro nel caso bidimensionale), o tassellazioni diverse (ad es. esagonali o triangolari nel caso bidimensionale).

■ Nei casi concreti soltanto regioni finite dello spazio cellulare vengono considerate.

■ A tal fine è stata introdotta la nozione di stato quiescente:

Uno stato quiescente  $q$  è tale che  $\tau(q, q, \dots, q) = q$

Una configurazione  $c$  è finita se  $c(i) = q$  eccetto un numero finito di celle.

■ In una configurazione finita  $c$ , possono cambiare stato soltanto le celle che non appartengono alla regione stazionaria  $R_s$  definita come:

$$R_s = \{i \mid (c(i) = q) \wedge (j \in \mathcal{N}(X, i)) \Rightarrow c(j) = q)\}$$



# Vicinati notevoli

AC unidimensionali: vicinato di raggio **1**  $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

vicinato di raggio **n**  $X = \{x \mid -n \leq x \leq n\}$



vicinato (in giallo) della cella 1 in un AC unidimensionale con vicinato di raggio 2

AC bidimensionali a tassellazione quadrata:

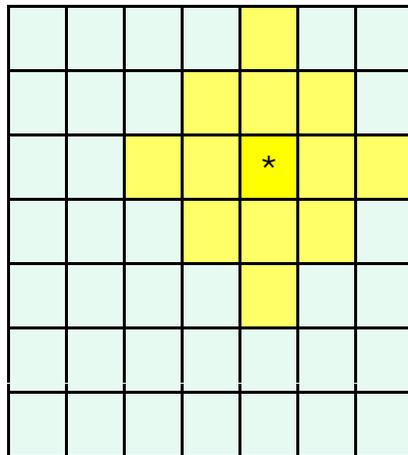
vicinato di Moore (di raggio **1**)  $X = \{x, y \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$

vicinato di Moore di raggio **n**  $X = \{x, y \mid -n \leq x \leq n, -n \leq y \leq n\}$

AC bidimensionali a tassellazione quadrata:

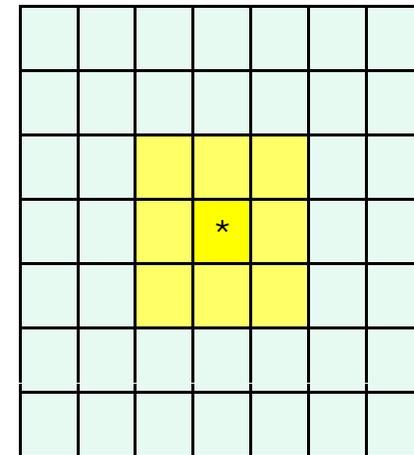
vicinato di von Neumann (di raggio **1**)  $X = \{x, y \mid (|x| + |y| \leq 1)\}$

vicinato di von Neumann di raggio **n**  $X = \{x, y \mid (|x| + |y| \leq n)\}$



←----- vicinato di von Neumann di raggio 2 della cella con asterisco

vicinato di Moore della cella con asterisco ----->





## automa cellulare: un esempio

- Si vuole realizzare un automa cellulare per abbozzare il problema della propagazione di un'epidemia.
- Si consideri un caso ideale semplicissimo di una malattia vegetale (inventata di ... sana pianta), che si propaga in una coltivazione, dove le piante sono state disposte in un reticolo quadrato, ad eccezione dei punti ove vi sono affioramenti rocciosi.
- La malattia è benigna: quando la pianta si infetta, ha un periodo di incubazione della malattia di un giorno, dopo il quale si manifesta la malattia, in questa fase la pianta infetta le piante immediatamente vicine, che la circondano, passato un giorno la pianta entra in fase di guarigione, non è più infettiva, né può ammalarsi successivamente.
- L'AC quindi può essere bidimensionale a celle quadrate, ciascuna avente una o nessuna pianta, il vicinato deve essere quello di Moore :

**epidemia** =  $\langle \mathbb{Z}^2, X = \{x, y \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}, S = \{-1, 0, 1, 2\}, \tau \rangle$

- Per comodità di definizione di  $\tau$  si è scelto di rappresentare gli stati con i seguenti valori interi: **-1** mancanza di pianta (roccia), **0** pianta malata, **1** pianta sana, **2** pianta guarita.
- $\tau \equiv \{-1 \rightarrow -1; 0 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 2; 1 \rightarrow ((\prod_{i=1,8} s_i) \neq 0)\}$  (un passo  $\equiv$  un giorno)  
NB: a **falso** corrisponde il valore intero **0**, a **vero** **1**, " $\rightarrow$ " indica transizione.



# PROPRIETÀ DEGLI AUTOMI CELLULARI

**l aspetto** (anni 50/75):

**principalmente sono indagate le proprietà formali degli Automi Cellulari**

## PROBLEMATICHE TEORICHE TRATTATE:

computazionali

universalità di calcolo

relazioni fra proprietà dei  
singoli automi e l'Automa  
Cellulare globalmente

reversibilità  
autorganizzazione  
processi attrattivi

## APPLICAZIONI

Biologia  
Fisica  
Informatica

modelli di riproduzione e crescita  
sistemi complessi discreti  
parallelismo

CURIOSITA' (? !)

Il gioco della vita



# Macchina di Turing vs Automi Cellulari

## Data una generica MT esiste un AC che la simula

Ci si riferisce per Macchina di Turing (MT) alla classica definizione di Turing (un solo nastro infinito da ambo le parti):

$$MT = \langle Q, q_0, A, F, \delta \rangle$$

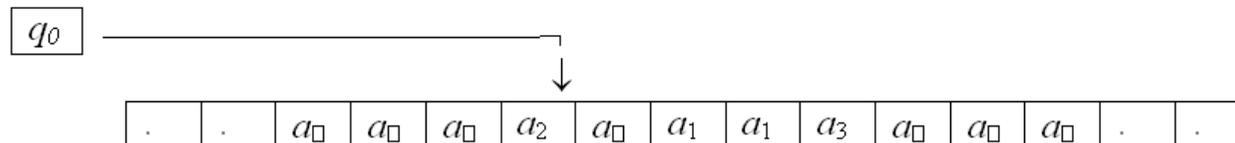
con

- $Q$  l'insieme finito di stati
- $q_0$  lo stato iniziale
- $F$  l'insieme degli stati finali
- $A$  l'alfabeto finito, comprendente il simbolo vuoto  $a_{\square}$
- $\delta: (Q-F) \times A \rightarrow Q \times A \times \{=>, <=, \parallel\}$  con “=>”, “<=”, “ $\parallel$ ” rispettivamente movimento della testina a destra, sinistra, testina ferma.

La configurazione al passo  $t$  della MT è specificata dalla sequenza di simboli sul nastro dal primo simbolo (verso sinistra) diverso da  $a_{\square}$  all'ultimo simbolo (verso destra) diverso da  $a_{\square}$ , il simbolo letto dalla testina della MT è preceduto dal nome dello stato attuale.

Es.1:

Una possibile configurazione iniziale della MT



è specificata da

$$[q_0 a_2, a_{\square}, a_1, a_1, a_3]$$



# Macchina di Turing vs Automi Cellulari

## Regole di costruzione dell'AC

Costruiamo l'AC unidimensionale che simula la MT secondo le seguenti specifiche:

$$AC = \langle \mathfrak{Z}, X, S, \sigma \rangle$$

ove

- $\mathfrak{Z}$  è l'insieme dei numeri interi
- $X = \{-1, 0, 1\}$
- $S = S_1 \cup S_2$  con  $S_1 = \{ \langle a_x \rangle \mid a_x \in A \}$  ed  $S_2 = \{ \langle q_y a_x \rangle \mid a_x \in A, q_y \in (Q-F) \}$

Lo stato  $\langle a_{\square} \rangle$  è lo stato quiescente

La configurazione dell'AC corrispondente all'es.1 è:

.	.	$\langle a_{\square} \rangle$	$\langle a_{\square} \rangle$	$\langle a_{\square} \rangle$	$\langle q_0 a_2 \rangle$	$\langle a_{\square} \rangle$	$\langle a_1 \rangle$	$\langle a_1 \rangle$	$\langle a_3 \rangle$	$\langle a_{\square} \rangle$	$\langle a_{\square} \rangle$	$\langle a_{\square} \rangle$	.	.
---	---	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	---------------------------	-------------------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	---	---

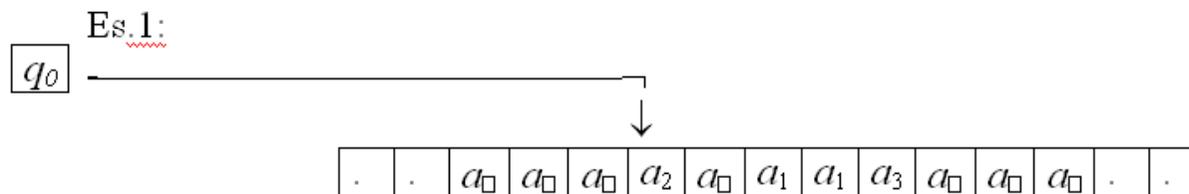
La regola di costruzione è banale: in sequenza per ogni cella si mette lo stato corrispondente al simbolo della MT, eccetto che per la cella sotto scansione a cui corrisponde il simbolo dell'AC consistente in: stato\_attuale\_MT + simbolo\_sotto\_scansione\_MT.

Si può notare come in una configurazione dell'AC corrispondente ad una configurazione della MT, esiste solo uno stato di  $S_2$ , in quanto una sola cella è sotto scansione, inoltre le configurazioni di AC corrispondenti a configurazioni di MT sono finite in quanto nel nastro della MT vi sono sempre un numero finito di simboli diversi dal simbolo vuoto  $a_{\square}$ , corrispondendo questo per l'AC ad un numero finito di celle con stato diverso da quello quiescente.



# Macchina di Turing vs Automi Cellulari

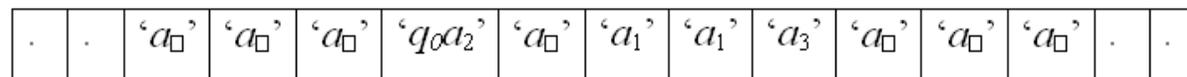
## Confronto configurazioni MT ed AC



è specificata da

$[q_0 a_2, a_\square, a_1, a_1, a_3]$

La configurazione dell'AC corrispondente all'es.1 è:



La regola di costruzione è banale: in sequenza per ogni cella si mette lo stato corrispondente al simbolo della MT, eccetto che per la cella sotto scansione a cui corrisponde il simbolo dell'AC consistente in: stato\_attuale\_MT + simbolo\_sotto\_scansione\_MT.



# Macchina di Turing vs Automi Cellulari

## Funzione di transizione dell'AC

Si può notare come in una configurazione dell'AC corrispondente ad una configurazione della MT, esiste solo uno stato di  $S_2$ , in quanto una sola cella è sotto scansione, inoltre le configurazioni di AC corrispondenti a configurazioni di MT sono finite in quanto nel nastro della MT vi sono sempre un numero finito di simboli diversi dal simbolo vuoto  $a_{\square}$ , corrispondendo questo per l'AC ad un numero finito di celle con stato diverso da quello quiescente.

La funzione di transizione  $\sigma$  è così specificata:

$\sigma('a_i', 'a_j', 'a_k') = 'a_j'$ , (lo stato non varia) per  $'a_i', 'a_j', 'a_k' \in S_1$

$\sigma('q_h a_i', 'a_j', 'a_k') = 'a_j'$ , lo stato non varia per  $'a_i', 'a_k' \in S_1$ ,  $'q_h a_i' \in S_2$ ,  $\tau(q_h, a_i) = \langle q_r, a_s, m_t \rangle$  con  $m_t \neq \Rightarrow$ ; con  $m_t = \Rightarrow$  (la testina si sposta a destra) si ha che  $\sigma('q_h a_i', 'a_j', 'a_k') = 'q_r a_i'$ .

$\sigma('a_i', 'a_j', 'q_h a_k') = 'a_j'$ , lo stato non varia per  $'a_i', 'a_k' \in S_1$ ,  $'q_h a_k' \in S_2$ ,  $\tau(q_h, a_k) = \langle q_r, a_s, m_t \rangle$  con  $m_t \neq \Leftarrow$ ; con  $m_t = \Leftarrow$  (la testina si sposta a sinistra) si ha che  $\sigma('a_i', 'a_j', 'q_h a_k') = 'q_r a_i'$ .

$\sigma('a_i', 'q_h a_j', 'a_k') = 'a_s'$  per  $'a_i', 'a_k' \in S_1$ ,  $'q_h a_j' \in S_2$ ,  $\tau(q_h, a_j) = \langle q_r, a_s, m_t \rangle$  con  $m_t \neq \parallel$ ; con  $m_t = \parallel$  (la testina è ferma e  $q_r$  allora è uno stato finale) si ha che  $\sigma('a_i', 'q_h a_j', 'a_k') = 'a_s'$  (in questo caso non ci sono più nell'AC celle con stati di  $S_2$  e l'AC rimane nella stessa configurazione, corrispondendo ciò alla fermata della MT, il risultato del calcolo è la configurazione dell'AC).



# Macchina di Turing vs Automi Cellulari

## Traccia della dimostrazione

Possiamo dimostrare per induzione che il calcolo della MT (sequenza di configurazioni) è simulato dalla corrispondente sequenza di configurazioni dell'AC, costruito sulla specificazione della MT considerata, fino alla fermata della MT, che corrisponde ad una configurazione stabile dell'AC.

Alla configurazione iniziale (passo 0) corrisponde una configurazione corrispondente dell'AC secondo la regola di costruzione.

Si pone che la configurazione della MT e quella dell'AC fino al passo  $n$  (prima della fermata) corrispondano per ipotesi di induzione.

Si dimostra per costruzione (considerando i casi possibili) che vale la corrispondenza anche per il passo  $n+1$  dalla definizione della funzione di transizione dell'AC a partire dalle configurazioni della MT e dell'AC al passo  $n$ .

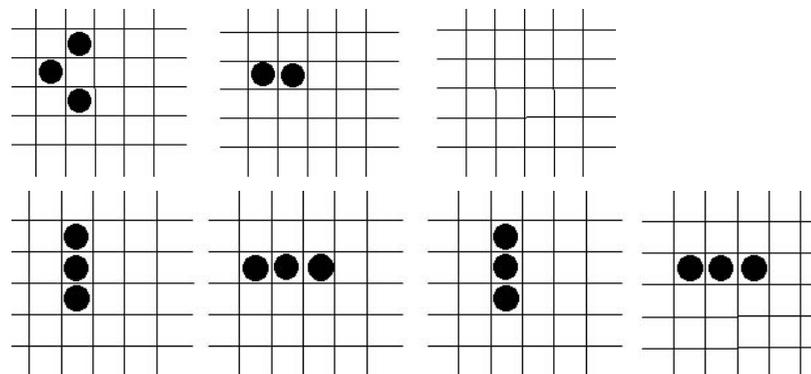


## Un esempio di AC: il gioco della vita di Conway (1)

- Il gioco della vita di Conway genera un universo in miniatura. E' diventato famoso in quanto da regole estremamente semplici vengono fuori comportamenti di inaspettata complessità.
- E' un AC a 2 dimensioni a celle quadrate. Ciascuna cella può assumere soltanto 2 stati: vivo o morto.
- Ad ogni passo, è determinato il nuovo stato di ogni cella considerando il suo stato e quello delle 8 celle che la circondano secondo le seguenti regole:
  - Se è viva ed ha 2 o 3 celle vicine vive, allora sopravvive; altrimenti muore per isolamento o sovrappopolazione.
  - Se è morta e ha 3 vicini vivi, allora diventa viva.

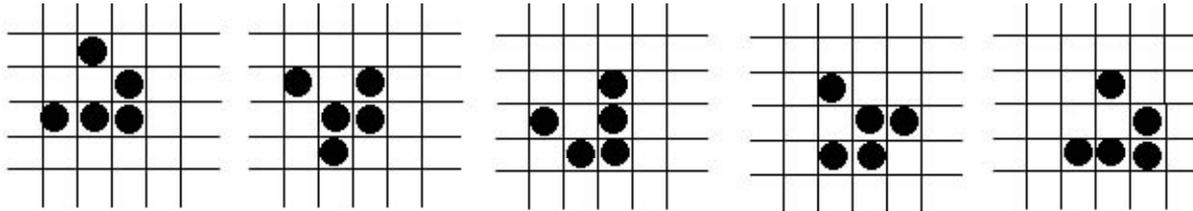
Esempi:

semafori



## Un esempio di AC: il gioco della vita di Conway (2)

Un esempio interessante: l'aliante



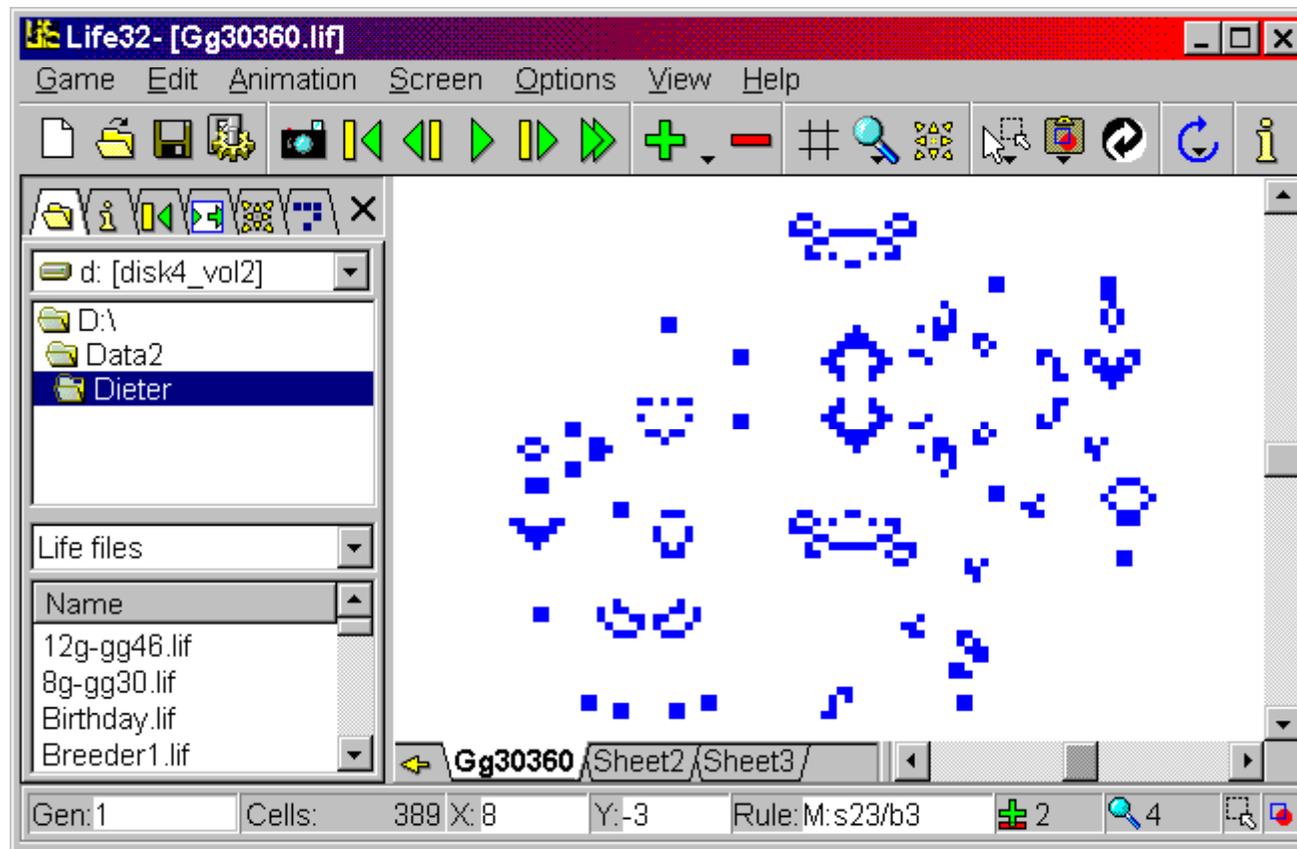
- Da una configurazione casuale del gioco della vita, dopo un iniziale transiente caotico è possibile rilevare l'emergere di strutture organizzate per un periodo più o meno lungo; l'isolamento e l'osservazione di queste strutture porta talvolta ad identificare processi estremamente complessi e suggestivi.
- Ciò che rende magico il gioco della vita è da un lato la sorpresa nel vedere emergere nel piano cellulare un comportamento imprevedibile di grande suggestione ed intuitivamente identificabile nelle sue caratteristiche, dall'altro lato, in contrasto, l'incapacità di poter progettare, se non a posteriori sulla base delle precedenti osservazioni, configurazioni con comportamenti specifici non banali.
- Il gioco della vita fu fondamentale per capire le potenzialità degli AC. Von Neumann morì prematuramente e non poté esplorare ulteriormente le potenzialità degli AC.
- Paradossalmente l'automa autoriproducentesi (una Macchina di Turing incorporata in uno spazio discreto bidimensionale e quindi "progettata" secondo canoni sequenziali) nascose le interessanti proprietà di **parallelismo** ed **acentrismo** degli AC.



## Un esempio di AC: il gioco della vita di Conway (3)

# Presentazione con Life32

Conway's Game of Life freeware for Windows9x/NT/2000/XP



<http://psoup.math.wisc.edu/Life32.html>



## Automati Cellulari totalistici e loro notazioni

Automi Cellulari, i cui stati sono individuati da valori interi e la cui funzione di transizione si ricava dalla somma dei valori degli stati nel vicinato, incluso o escluso lo stato della cella centrale, si definiscono *totalistici*.

Esempio: AC con legge di maggioranza in uno spazio bidimensionale a celle quadrate con vicinanza di Moore a valori di stato interi 0 (*falso*), 1 (*vero*) ove con  $s_j$  si indica lo stato del vicino con indice  $j$ :

$$\langle \mathbb{Z}^2, X=\{x,y \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}, S=\{0,1\}, \tau \equiv \sum_{j=0,8} s_j \geq 5 \rangle$$

Una notazione usata nel caso in cui si escluda per la somma il valore dello stato della cella centrale, si specificano le condizioni relativamente ai valori della cella centrale.

Nel caso del "gioco della vita" di Conway

$$\langle \mathbb{Z}^2, X=\{x,y \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}, S=\{0,1\}, \tau_{\text{vita}} \rangle$$

vi sono molti modi di sintetizzare la funzione di transizione  $\tau_{\text{vita}}$ :

$1=0:3/1:2,3$  la cella assume valore **1** se  $s_0=0$  e  $(\sum_{j=1,8} s_j)=3$ , se  $s_0=1$  e  $(\sum_{j=0,8} s_j)=2$ ,  $(\sum_{j=0,8} s_j)=3$  (in tutti gli altri casi assume valore **0**)

$$((s_0=0) \wedge ((\sum_{j=1,8} s_j)=3)) \vee ((s_0=1) \wedge (((\sum_{j=1,8} s_j)=2) \vee ((\sum_{j=1,8} s_j)=3))).$$

# <Z,{-1,0,1},{0,1},0≤n≤255>

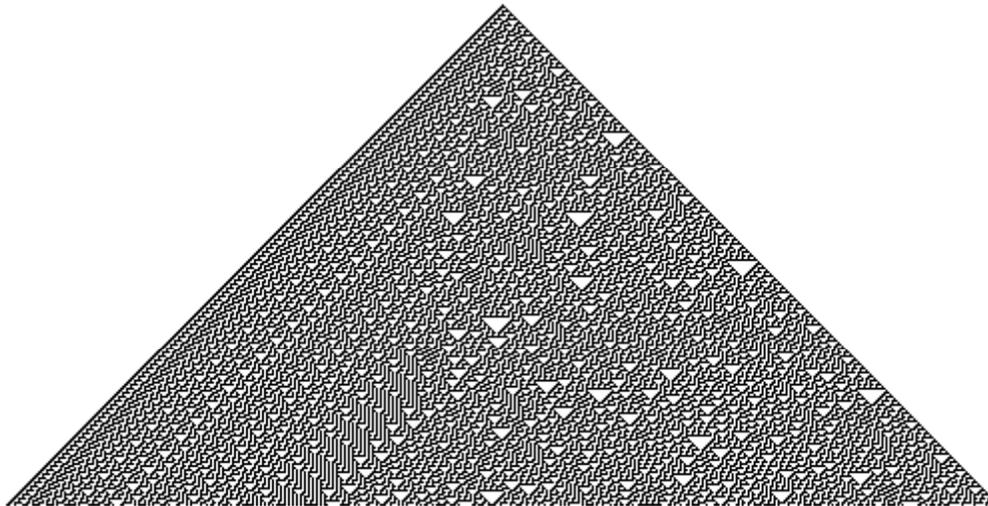
I più semplici automi cellulari: una dimensione, due stati 0-1 con vicinanza sinistra, centro, destra e funzione di transizione espressa come un numero ricavabile dalla convenzione:

in alto le possibili triple in ordine da 111 a 000: es. 111 110 101 100 011 010 001 000

in basso le transizioni, il cui valore da nome all'AC es. 0 0 0 1 1 1 1 0

**automa cellulare regola 30**

<<-----



Esempi di evoluzione temporale, visualizzati dall'alto verso il basso come sequenza di righe.

La configurazione iniziale è data in entrambi i casi da tutti 0 ad eccezione di una cella con stato 1 al centro

----->

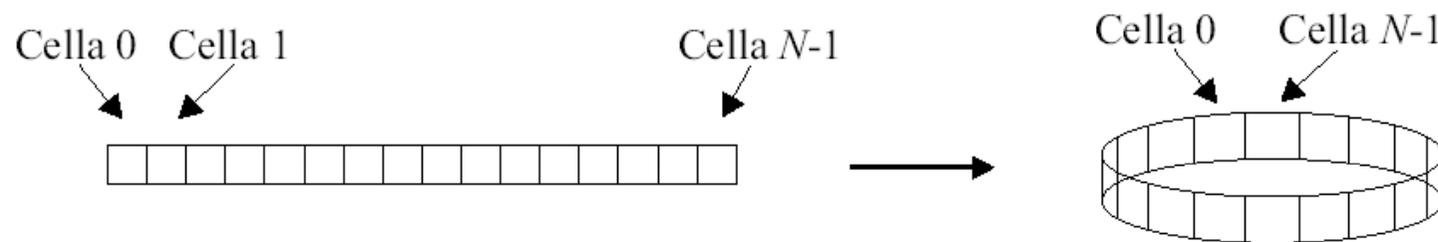
**automa cellulare regola 110**

111 110 101 100 011 010 001 000  
0 1 1 0 1 1 1 0



# LE CLASSI DI COMPLESSITÀ DI WOLFRAM

- Wolfram determinò, osservando sistematicamente l'evoluzione di semplici automi cellulari e basandosi su considerazioni teoriche di meccanica statistica, 4 classi diverse di automi cellulari.
- Tale classificazione si riferisce ad automi cellulari di lunghezza infinita. Nell' utilizzo pratico l' automa cellulare è confinato in una regione finita dello spazio cellulare,
- Un modo per far ciò senza alterare le proprietà di base degli automi cellulari (e quindi preferibile), è considerare un numero finito di celle, che si richiudono su se stesse, ad esempio un anello nel caso unidimensionale, un toro in quello bidimensionale e così via.
- Nel caso finito di  $n$  celle ed  $m$  possibili stati esistono in tutto  $m^n$  configurazioni e pertanto una di esse prima o poi si ripeterà, costituendo una struttura periodica.



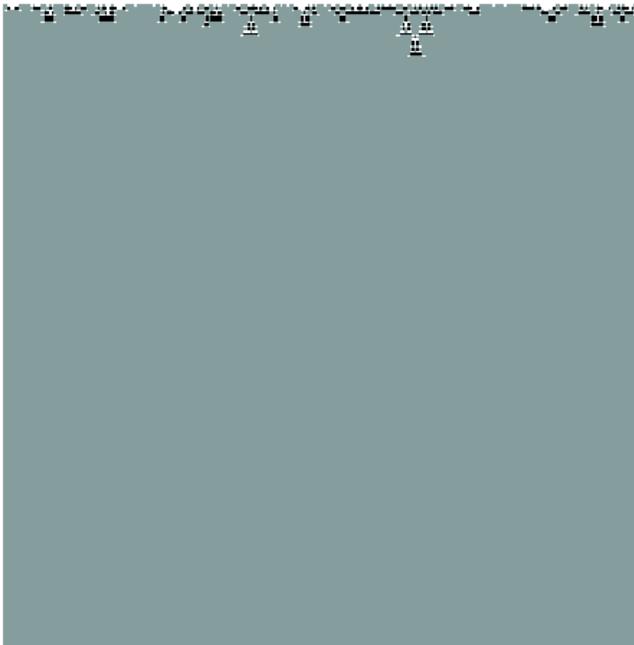


## LE CLASSI DI COMPLESSITÀ DI WOLFRAM

Presentiamo in modo intuitivo la classificazione degli automi cellulari secondo Wolfram:

Si parte ad esempio da una configurazione iniziale, composta da 250 celle, e generata in maniera casuale in modo che ogni cella possa assumere stato 0 (colore bianco), 1 (colore grigio) o 2 (colore nero) con eguale probabilità.

L'evoluzione temporale è visualizzata dall'alto verso il basso come sequenza di righe.

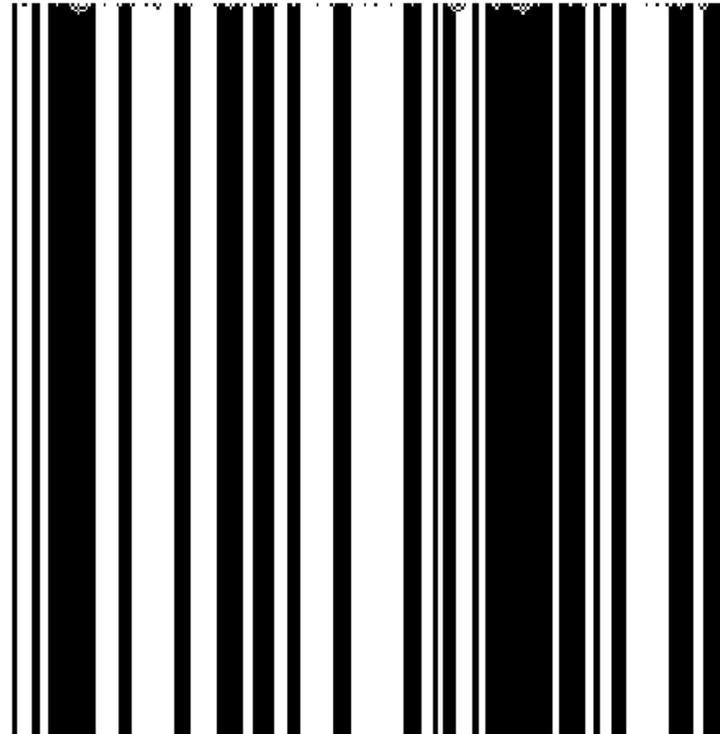


La **classe 1** è composta dagli automi cellulari la cui evoluzione, qualsiasi sia la configurazione iniziale, dopo un numero finito di passi porterà l'automata in uno stesso stato stabile ed omogeneo oppure in un ciclo definito: c'è un solo punto fisso di attrazione.



## LE CLASSI DI COMPLESSITÀ DI WOLFRAM

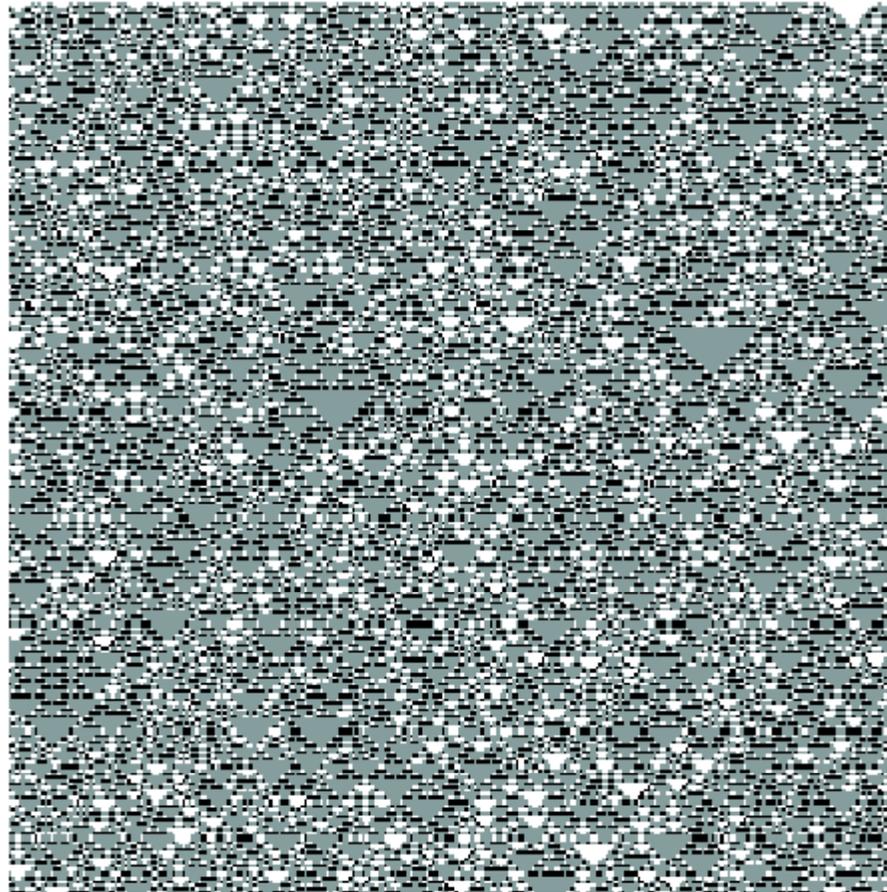
Gli automi cellulari della **classe 2** fanno sì che il valore dello stato di una cella, dopo un certo tempo, sarà determinato dai valori iniziali di alcune celle situate in una regione limitata e connessa. La conoscenza dello stato iniziale di una piccola regione è sufficiente per predire lo stato finale di una data regione di celle. Di solito le regole di questa classe danno luogo a semplici strutture che possono essere stabili o periodiche e che rimangono isolate una dall'altra. Gli automi cellulari appartenenti a questa classe funzionano come filtri che generano strutture semplici a partire da particolari valori di stato iniziale, per questa ragione, essi appaiono particolarmente utili per l'elaborazione di immagini. Esistono più punti di attrazione.





## LE CLASSI DI COMPLESSITÀ DI WOLFRAM

■ Negli automi cellulari della **classe 3** il valore di una cella dipenderà dai valori iniziali di un sempre crescente numero di celle. Una predizione dello stato finale richiede la conoscenza completa dello stato iniziale. In un automa cellulare di questo tipo, per quasi tutti i possibili stati iniziali, l'evoluzione porterà a configurazioni caotiche (aperiodiche). Dopo un numero sufficientemente grande di passi, le proprietà statistiche di queste configurazioni sono praticamente uguali in relazione ai possibili stati iniziali. Si ha quindi il manifestarsi dei comportamenti classici dei fenomeni turbolenti. Lo spazio delle fasi è dominato da attrattori strani, al limite tra ordine e caos.

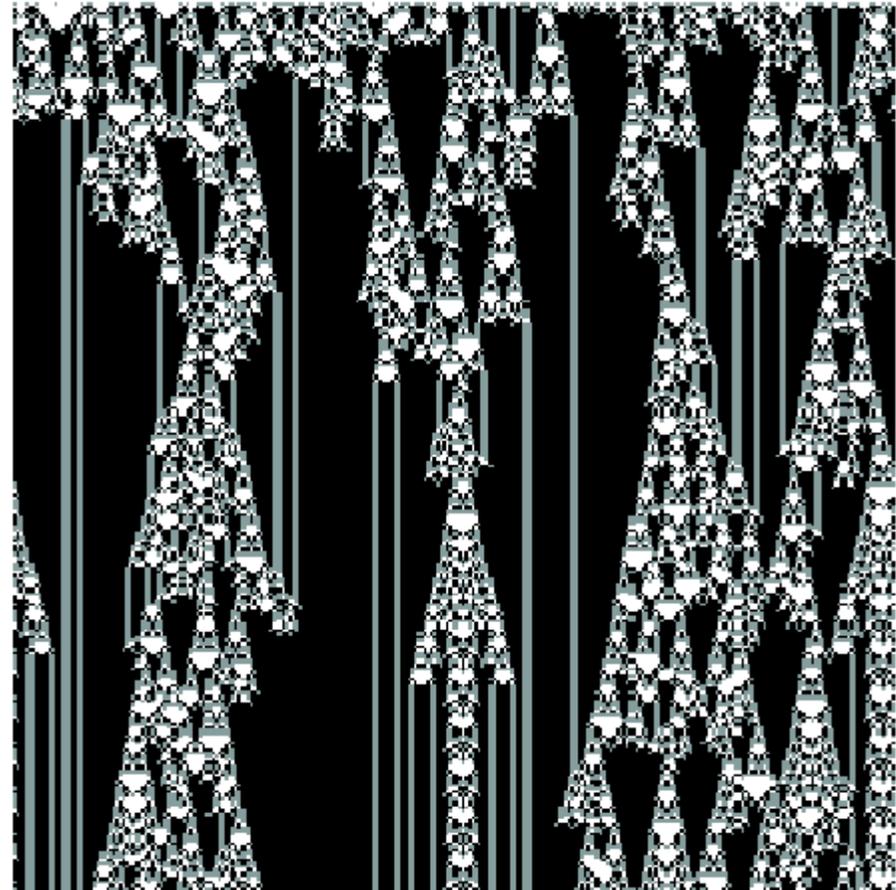




## LE CLASSI DI COMPLESSITÀ DI WOLFRAM

Negli automi cellulari della **classe 4**, ci sono poche regole di transizione che generano strutture di sostanziale complessità spaziale e temporale. Per questa classe di automi, in molti casi tutte le celle variano il loro stato dopo un numero finito di passi. In alcuni casi si osservano strutture periodiche o stabili che persistono per un numero elevato di passi. In altri casi si osservano delle strutture che si propagano. Il valore dello stato di una cella non può essere determinato tramite una procedura di calcolo più semplice della simulazione della sua evoluzione.

Il comportamento degli automi cellulari della classe 4 non è predicibile anche conoscendo la configurazione degli stati iniziali, perché sono dominati da fenomeni di transizione da comportamenti altamente caotici a dinamiche tipiche degli attrattori strani. Fa parte di questa classe il gioco "Life" o "Vita".





## LE CLASSI DI COMPLESSITÀ DI WOLFRAM

- Ora supponiamo di assegnare ad un automa cellulare una qualche configurazione iniziale scelta a caso e di farlo evolvere per molti passi nel tempo e quindi di registrare lo stato finale. Si torni ora alla configurazione di partenza, si cambi il valore di una singola cella e si faccia evolvere il sistema per lo stesso numero di passi.
- Che effetto avrà il piccolo cambiamento sullo stato finale?
- Per un automa della classe 1 non c'è alcuna conseguenza, infatti un sistema della prima classe raggiunge lo stesso stato finale indipendentemente dallo stato iniziale.
- Un automa della classe 2 può mostrare qualche effetto, ma limitato ad una piccola area vicino al sito in cui è avvenuto il cambiamento.
- In un sistema della classe 3, invece, l'alterazione di una singola cella può provocare un cambiamento che si propaga lungo tutto il reticolo, generando un comportamento caotico.
- Le regole della classe 4 sono le più rare e le più interessanti, l'AC si trova "ai margini del caos" generando strutture via via più complesse quanto maggiore è lo spazio disponibile, si congetture che posseggano la proprietà di universalità (es. gioco della vita).





# AC per l'addizione

**Rappresentazione posizionale binaria ridondante:**

**coppie contigue di cifre binarie hanno lo stesso peso posizionale**

$$10\ 11 = 01\ 11 = 11\ 00 = 01\ 00\ 00 = 10\ 00\ 00 = 4$$

$$n = \sum_{i=0}^l (a_{2i+1} + a_{2i}) 2^i$$

$2^i$

$2^{i-1}$

.....	.....	$a_{2i+1}$	$a_{2i}$	$a_{2(i-1)+1}$	$a_{2(i-1)}$	.....
.....	.....	$b_{2i+1}$	$b_{2i}$	$b_{2(i-1)+1}$	$b_{2(i-1)}$	.....

Si ponga:

$$a'_{2i} = 0 \quad a'_{2i+1} = a_{2i}$$

$$(a_{2(i-1)+1} + b_{2(i-1)+1} + b_{2(i-1)}) 2^{i-1} = c_{2i} 2^i + c_{2(i-1)+1} 2^{i-1}$$

$$b'_{2i} = c_{2i}$$

$$(a_{2i+1} + b_{2i+1} + b_{2i}) 2^i = c_{2(i+1)} 2^{i+1} + c_{2i+1} 2^i,$$

$$b'_{2i+1} = c_{2i+1}$$

.....	.....	$a_{2i}$	$0$	$a_{2(i-1)}$	$0$	.....
.....	..... $c_{2(i+1)}$	$c_{2i+1}$	$c_{2i}$	.....	.....	.....



# AC per l'addizione

ricordiamo che:

$$a'_{2i+1} = a_{2i}$$

$$a'_{2i} = 0$$

$$(a_{2(i-1)+1} + b_{2(i-1)+1} + b_{2(i-1)})2^{i-1} = c_{2i}2^i + c_{2(i-1)+1}2^{i-1}$$

$$b'_{2i} = c_{2i}$$

$$(a_{2i+1} + b_{2i+1} + b_{2i})2^i = c_{2(i+1)}2^{i+1} + c_{2i+1}2^i,$$

$$b'_{2i+1} = c_{2i+1}$$

## Esempio:

		$2^2$	$2^1$	$2^0$	
<b>Passo 0</b>	.....	0 0	1 1	0 1	.....
	.....	0 0	1 0	1 0	.....
<b>Passo 1</b>	.....0	0 0	1 0	1 0	.....
	.....0	0 1	0 0	1 0	.....
<b>Passo 2</b>	.....0 0	0 0	0 0	0 0	.....
	.....0 0	1 0	1 1	0 0	.....



# PROPRIETÀ DEGLI AUTOMI CELLULARI

**II aspetto** (anni 75/0..): oltre i succitati temi, emerge sempre più prepotentemente via via che aumenta la potenza di calcolo dei Calcolatori Elettronici la ricerca nel campo degli AC per la

## **Modellizzazione e Simulazione di Fenomeni Complessi**

**abbiamo il passaggio dalla formula all'algoritmo**

☞ "Le leggi della scienza forniscono algoritmi per determinare il comportamento dei sistemi. Il programma di un calcolatore è un veicolo tramite il quale gli algoritmi possono essere espressi ed applicati. In un calcolatore gli oggetti fisici e le strutture matematiche possono essere rappresentati sotto forma di numeri e di simboli e si può scrivere un programma per elaborare questi enti in conformità con gli algoritmi. Quando viene eseguito il programma provoca nei numeri e nei simboli certe modifiche, dettate dalle leggi scientifiche: è così che esso permetta di ricavare le conseguenze di quelle leggi"

**S. WOLFRAM**

☞ Gli Automi Cellulari sono un'alternativa (piuttosto che un'approssimazione) alle equazioni differenziali nel modellare la Fisica.

**T. TOFFOLI**



# APPLICAZIONI DEGLI AUTOMI CELLULARI

## Nel campo della FISICA:

Gli automi cellulari risultano come la controparte concettuale del campo nel contesto dei fenomeni "microscopici".

La fenomenologia rilevante emerge dall'interazione di un numero estremamente grande di unità microscopiche molto semplici

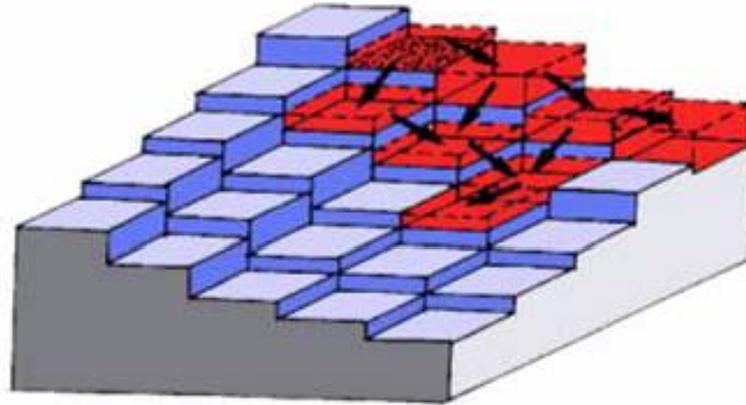
## In sistemi descrivibili in termini acentrati:

Gli automi cellulari sostituiscono sistemi di equazioni differenziali impraticabili per la loro complessità.

Fisica, Chimica	Fluidodinamica, Reazioni chimiche complesse
Biomedicina	AIDS, Tumori, Sviluppo di piante
Geologia	Lave, Frane, Terremoti
Pianificazione Territoriale	Sviluppo urbano, traffico
Economia	Simulazione dei mercati
Ecologia	Inquinamento, Biorisanamento dei suoli, Ecosistemi
ma anche	Matematica, Storia ..... ALTRO.

# Modellizzazione e simulazione di fenomeni complessi

- **Gli Automi Cellulari possono essere quindi descritti come una matrice di unità di Calcolo, ciascuna interagente con le sue vicine.**
- **Ogni unità rappresenta una porzione di spazio (la cella) e calcola le variazioni allo stato (fisico, chimico, biologico et c.) della cella.**



- **Gli AC sono stati applicati alla modellizzazione e simulazione di sistemi complessi, la cui evoluzione dipende da interazioni locali.**
- **Essi costituiscono una valida alternativa all'uso di sistemi di equazioni differenziali, spesso impraticabili per la loro complessità.**
- **Uno strano esempio: le equazioni di Volterra-Lotka e WaTor**

# Le equazioni di Volterra-Lotka

Le **equazioni di Lotka–Volterra**, anche conosciute come **equazioni preda-predatore**, sono una coppia di equazioni differenziali non-lineari del primo ordine, usualmente usate per descrivere la dinamica di un sistema biologico in cui due specie interagiscono, predatore e preda.

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \quad \frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x)$$

where

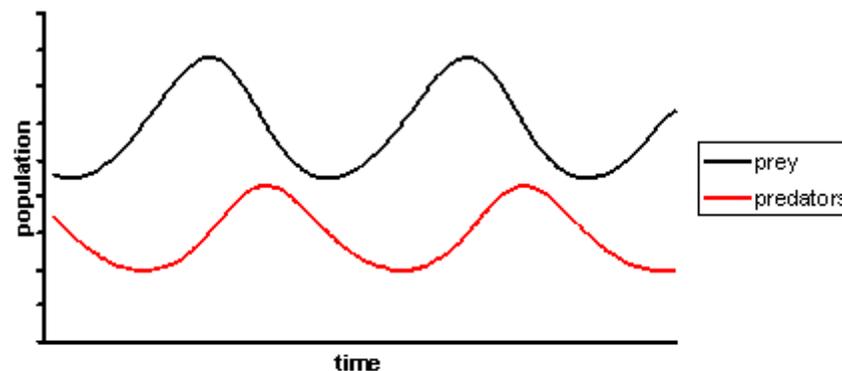
$y$  è il numero dei *predatori* (ad esempio, squali);

$x$  è il numero delle *prede* (ad esempio, pesciolini);

$t$  rappresenta il *tempo*

$dy/dt$  e  $dx/dt$  rappresentano la variazione nel tempo delle popolazioni;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sono *parametri* relativi alla interazione delle due specie.

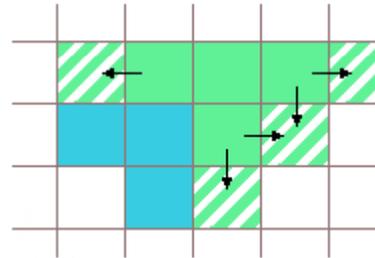


# WaTor e le equazioni di Volterra-Lotka

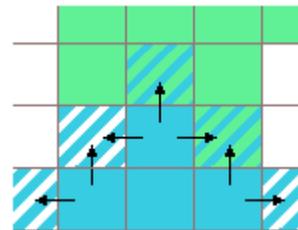
➤ **WA-TOR** di A.K. Dewdney è un AC toroidale a celle quadrate, che rappresenta un mondo acquatico, dove squali e pesciolini interagiscono.



➤ Un pesciolino nuota a caso verso una cella libera adiacente. Se per un certo numero di passi sopravvive, allora si riprodurrà nella prima cella libera adiacente .

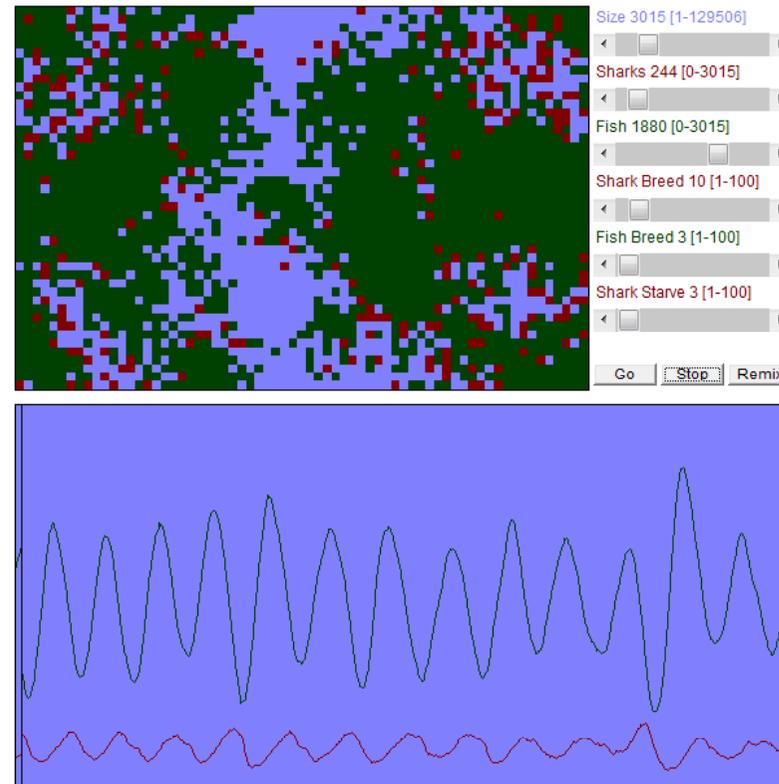


➤ Uno squalo mangia un pesciolino, se si trova in una cella adiacente, altrimenti nuota verso una cella libera. Se uno squalo non mangia per un certo numero di passi, muore. Uno squalo si riproduce con le stesse modalità di un pesciolino.



# WaTor e le equazioni di Volterra-Lotka

- Se gli squali sono pochissimi, i pesciolini si moltiplicheranno velocemente, seguirà una rapida crescita del numero degli squali per la facilità di procurarsi cibo.
- Quando i pesciolini si ridurranno per il gran numero degli squali, anche gli squali diminuiranno dopo un po' per mancanza di cibo.
- Le equazioni di Volterra-Lotka emergono dall'evoluzione di Wa-Tor.



<http://www.leinweb.com/snackbar/wator/>

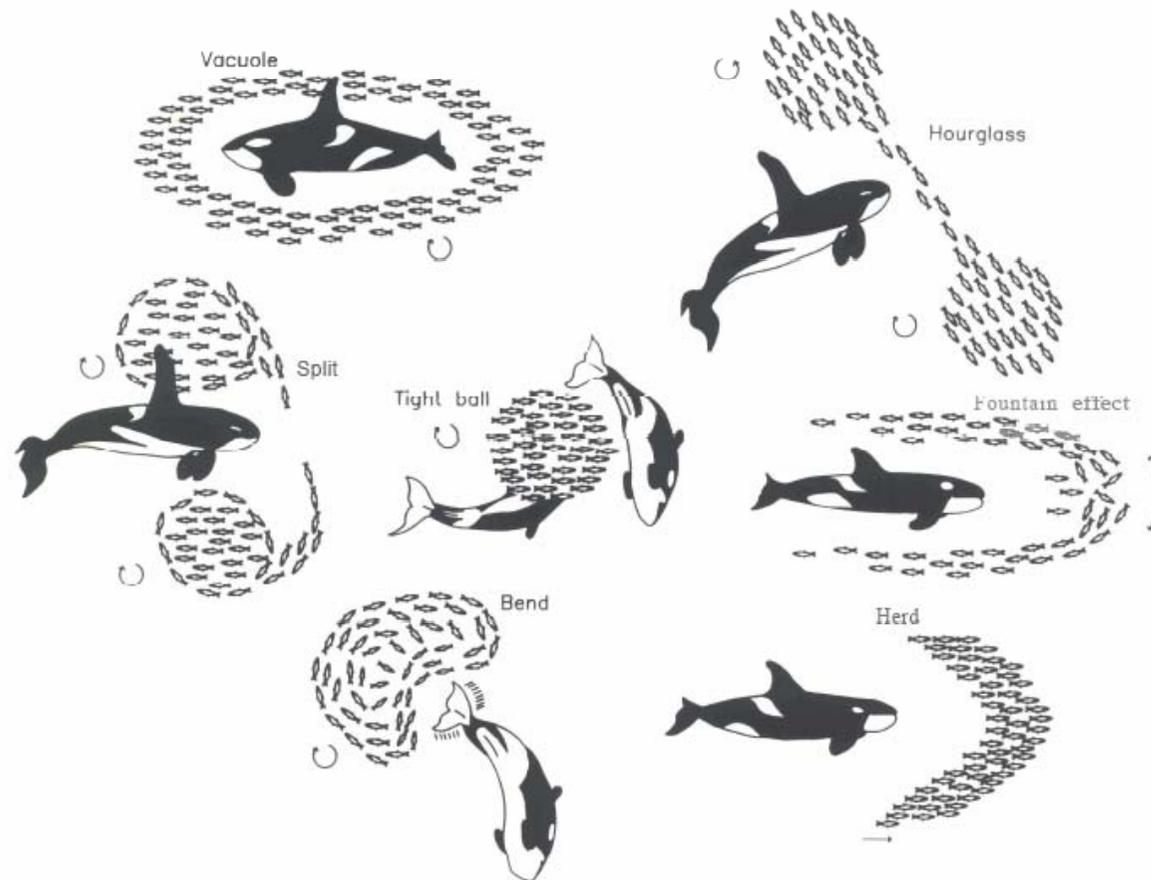
# Banchi di aringhe e orche assassine (1)

A CA model of herring school reactions: predicting anti-predator (killer whale) behaviour as observed in nature.

Banchi di aringhe adottano varie strategie durante gli attacchi dei predatori.

Questi differenti comportamenti possono essere simulati con un modello ad AC al variare dei valori dei parametri di attrazione fra aringhe, percezione del pericolo e reazione di fuga.

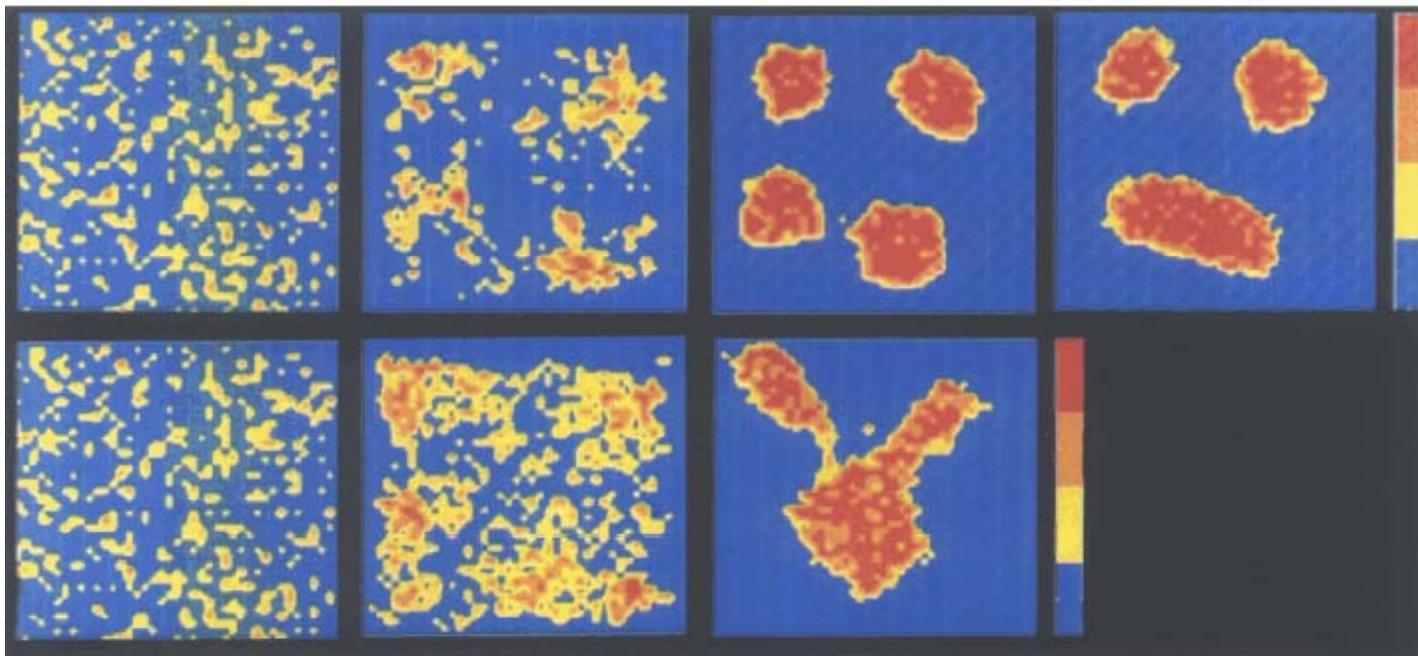
Figure 7. Schematic presentation of observed and recorded antipredator strategies including split, join, vacuole, hourglass, ball, bend, fountain and herd in free-swimming herring schools during killer whale attack in northern Norway. Reproduced with permission from Nøttestad and Axelsen (1997).



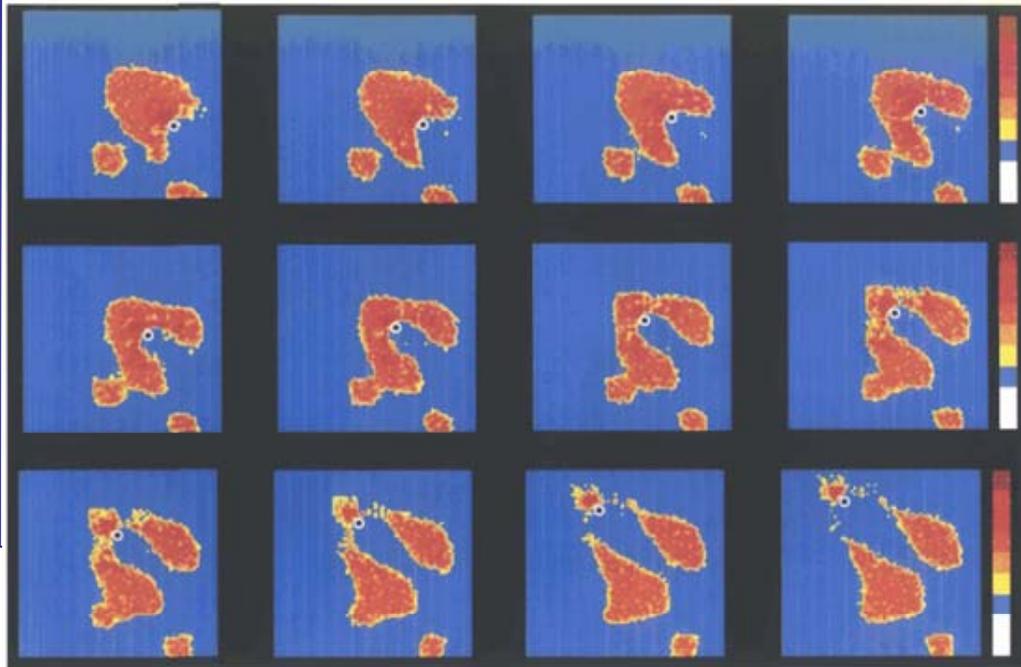
## **Banchi di aringhe e orche assassine (2)**

Un AC bidimensionale a celle quadrate. Lo stato della cella è specificato dal numero di aringhe con o senza orca assassina nella cella. Il vicinato dipende dalla massima distanza percettiva di prede e predatori. Le aringhe tendono a concentrarsi finché una massima densità è raggiunta secondo una funzione di attrazione probabilistica. Il predatore si muove preferibilmente verso aringhe isolate, mentre la preda scappa preferibilmente in direzione opposta secondo una funzione di "panico" probabilistica.

Due differenti formazioni di banchi da identiche condizioni iniziali, ma con differenti parametri di attrazione:



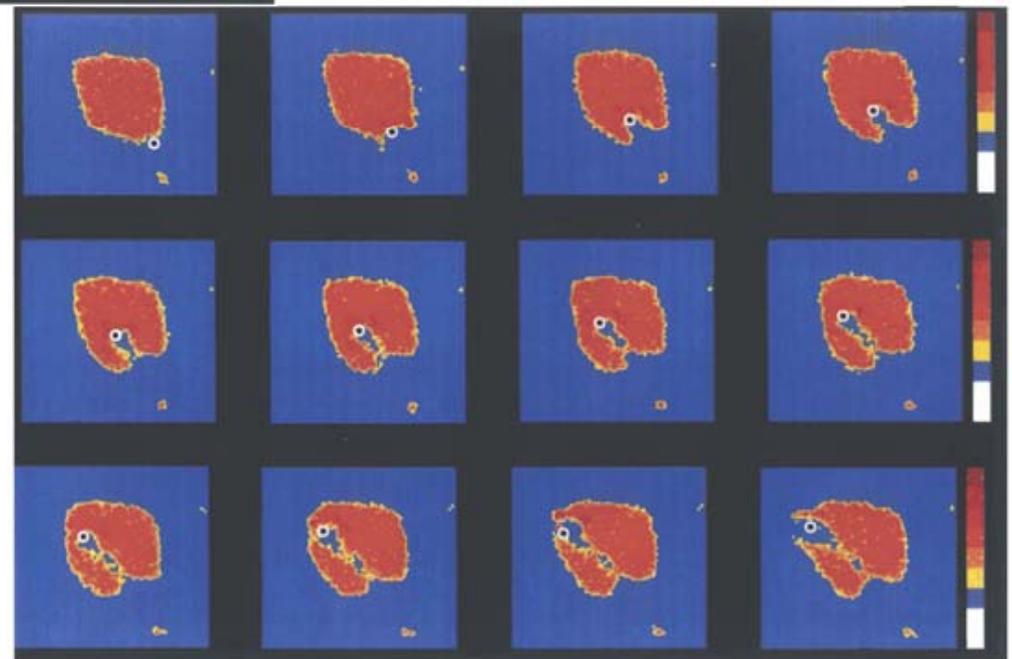
## Banchi di aringhe e orche assassine (3)



Diversi parametri della funzione di transizione in situazioni similari di attacco:

←-----Il banco si scinde in due parti principali e frammenti vari.

Il banco avvolge l'orca durante l'attacco ----->



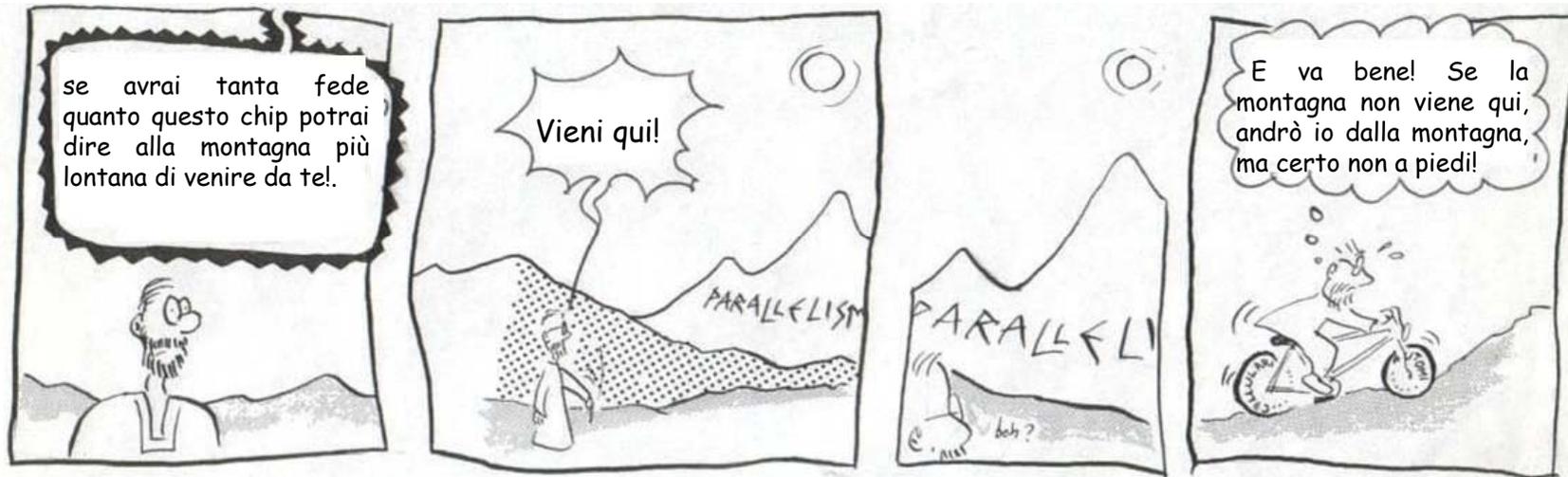


# CONCLUSIONE 1

## VERSO UNA VISIONE OLISTICA

- Si può porre a questo punto la questione, forse non sufficientemente meditata, dei rapporti fra strumenti formali, efficientemente ed efficacemente applicabili, e sviluppo della scienza.
- Non è un caso che si è assistito, per quanto riguarda lo studio dei sistemi naturali, ad un "imperialismo" della Fisica la quale si è fatta forte dello strumento del calcolo differenziale per descrivere le proprietà globali dei processi fisici.
- Altre discipline scientifiche, come ad esempio la Biologia, si sono attestate ad un "livello di scientificità" inferiore, per l'impossibilità da un lato di poter applicare il calcolo differenziale ai propri problemi e dall'altro per mancanza di strumenti alternativi altrettanto potenti; d'altronde è da notare che una situazione analoga s'è verificata per taluni problemi in Fisica, vedi l'esempio classico della turbolenza dei fluidi, in cui le configurazioni del fluido venivano trovate tramite l'osservazione di modellini del sistema fisico in scala (ad esempio sagome nella galleria del vento) per l'impraticabilità di maneggiare il sistema di equazioni differenziali.

## CONCLUSIONE 2



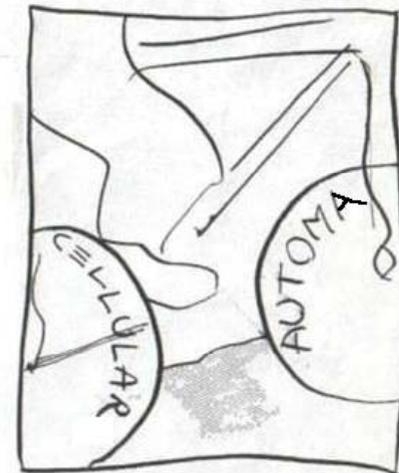
Questi è il pio informatico, una brava persona. Una voce dal cielo gli parla dei futuri destini gloriosi dell'Informatica: "sappi che i computer saranno sempre più veloci, i processori sempre più piccoli; inoltre ne potrai mettere a lavorare insieme quanti ne vorrai, sviluppando una potenza di calcolo mai vista. Potrai rivoluzionare il mondo!"

Il pio informatico si mette a lavorare con grande entusiasmo e fede, risolverà i più complessi problemi facendo lavorare in parallelo tantissimi computer. Ma, ahimé, vi è un piccolo guaio: è inutile avere tanti computer, se i problemi da risolvere sono concepiti in modo sequenziale!

Egli è profondamente deluso! Cosa è successo? Come si può esprimere un problema usando modelli paralleli?

Ecco, qui viene proposto un metodo buono per alcuni problemi importanti:

**un approccio ad AUTOMI CELLULARI**





## RIFERIMENTI

- von Neumann J.: Theory of self reproducing automata, University of Illinois Press, 1966.
- Burks A. W.: Essays on cellular automata. Urbana: University of Illinois Press, 1970
- Gardner, Martin (October 1970), "Mathematical Games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "Life"", Scientific American 223: 120–123 .
- Wolfram, S. : Theory and application of cellular automata. Singapore : World Scientific 1986
- Toffoli T. : Cellular Automata as an alternative to (rather than an approximation of) differential equations in modeling physics, Physica 10D, 117-127, 1984.
- Shet B., Nag P., Hellwarth R. W. – Binary addition on Cellular Automata – Complex System 5, (1991) 479-484
- Clemente A., De Biase G. A., Massini A. – Fast parallel arithmetic on Cellular Automata – Complex System 8, (1994) 435-441
- Chopard B. and Droz M.: Cellular automata modeling of physical systems - Cambridge University Press Collection Alea, 1998
- G. Spezzano, G. Talia: Calcolo Parallelo, Automi Cellulari e Modelli per Sistemi Complessi", Franco Angeli, Milano, 1999
- S. Di Gregorio, R. Serra - An empirical method for modelling and simulating some complex macroscopic phenomena by cellular automata - Future Generation Computer Systems Vol.16 2/3 pp.259-271, 1999
- Wolfram – A new kind of science - Wolfram media Inc. 2001
- Conway's Game of Life freeware - <http://psoup.math.wisc.edu/Life32.html>
- V. Volterra. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. In Animal Ecology. McGraw-Hill, 1931.
- A.K. Dewdney - Sharks and fish wage an ecological war on the toroidal planet Wa-Tor (Scientific American, December 1984)
- WATOR, Predator-Prey Simulation - <http://www.leinweb.com/snackbar/wator/>
- Vabø R., Nøttestad, L. (1997). An individual based model of fish school reactions: predicting antipredator behaviour as observed in nature, Fish. Oceanogr. 6 : 3, 155-171.