AUTOMI CELLULARI

Mariano Tomatis Antoniono

http://www.marianotomatis.it/content/software/automi.pdf

AUTOMI CELLULARI

Cos'è un Automa Cellulare

Molti sistemi del mondo fisico, socioeconomico, urbanistico e biologico sono definibili come sistemi complessi. Sono sistemi complessi ad esempio il moto dei fluidi, la trasformazione economica di una regione, la crescita di un centro urbano, la vita di un organismo, e molti altri.

Gli strumenti matematici classici per la descrizione dei fenomeni fisici si basano sul calcolo infinitesimale di Newton e Leibnitz, ma questi strumenti sembrano non essere particolarmente adatti per descrivere i sistemi complessi, poiché, da un lato, la descrizione approfondita di questi sistemi può condurre ad equazioni eccessivamente complicate, mentre, dall'altro lato, l'approssimazione nelle computazioni, altrove controllabile, può in questi casi divenire importante e influire fortemente sullo sviluppo del sistema. A volte non è neppure possibile formalizzare un fenomeno attraverso un sistema di equazioni a causa della sua *caoticità*.

Alcuni sistemi fisici, infatti, raggiungono una soglia talmente alta di complessità che in essi sorge il fenomeno del caos, definibile come l'incapacità di prevedere il comportamento di un sistema in maniera esatta nel corso del tempo (ad esempio nel caso di un fluido turbolento o del moto delle palle di un biliardo).

I fenomeni caotici presentano due aspetti fondamentali: l'irreversibilità del moto e la perdita irreversibile di informazioni sullo stato iniziale.
Tra gli strumenti alternativi alla tradizionale matematica, idonei al trattamento di questo tipo di sistemi e fenomeni e che consentono di ovviare a questo tipo di problemi, possono essere situati gli *automi cellulari*.

Il concetto di *automa cellulare* (o di *automa* in senso più generale) è stato introdotto nel 1947 da Von Neumann nel corso dei suoi studi sui fenomeni biologici, che egli descriveva come modalità di mutua interazione tra entità elementari, chiamate appunto "automi", le cui proprietà verranno in seguito descritte.
L'idea guida di Von Neumann era la seguente: considerato un insieme di molti automi dotati della capacità di interagire in maniera opportuna, il sistema, nella sua globalità, si mostrerà capace di comportamenti complessi e differenti, come se fossero finalizzati ad un obiettivo globale.

Un sistema complesso può quindi essere pensato come composto da entità semplici (gli automi appunto), in cui vi è una mutua interazione tra queste entità: questa mutua interazione dà luogo, nell'insieme, al comportamento globale del sistema complesso.

Una delle idee fondamentali del concetto di automa cellulare è quella di riuscire a ricostruire il comportamento complesso di un sistema a partire da semplici *regole* che descrivono l'interazione dei "micro-componenti" in cui si pensa suddiviso il sistema stesso.

Si potrebbe quindi affermare che l'idea di base degli automi cellulari è di tentare di descrivere un sistema complesso non "dall'alto", usando complesse equazioni, bensì simulandolo mediante interazioni di celle che seguono semplici regole, e lasciare così che la complessità emerga da tali interazioni.

Un po' di storia

Gli automi cellulari, come accennato prima, sono nati alla fine degli anni '40 grazie al lavoro dei matematici Stanislaw Ulam e John von Neumann; il loro iniziale scopo era di studiare macchine in grado di autoriprodursi e in grado di computare un qualsiasi algoritmo se opportunamente inizializzate (le cosiddette "macchine universali").

Un successivo importante sviluppo, anche con particolare attenzione alle possibili applicazioni, si è poi avuto a partire dagli anni '80 grazie ai lavori di Stephen Wolfram, di cui tratteremo in seguito, e di altri.

Gli automi cellulari hanno avuto applicazioni in fisica, chimica, biologia, ecologia e, a partire proprio dalla fine degli anni '80, nello studio della morfologia urbana e territoriale. Essi sono stati adoperati per simulare i processi più diversi: dalla percolazione del caffè, al procedere delle colate laviche, alle inondazioni, alla diffusione degli inquinanti, al procedere dei pedoni o all'aggirarsi di visitatori in un museo, senza dimenticare l'evoluzione di sistemi urbani. Negli anni sono stati quindi affrontati problemi di varia natura mediante modelli basati su automi cellulari; tra questi possiamo citare quelli legati al già citato studio dei movimenti dei pedoni in città, il problema del traffico dei veicoli, dell'urbanizzazione di una città o problemi di natura più schiettamente matematica come problemi di diffusione o lo studio della miscelazione di liquidi (Wolfram S.,"*Theory and Applications of Cellular Automata*", World Scientific, Singapore 1986).

Gli automi cellulari sono quindi adatti, in definitiva, per descrivere dinamiche globali che scaturiscono da elaborazioni locali uguali tra loro. Essi hanno riscosso molto successo perché, nonostante la semplicità, sono adatti a esprimere un gran numero di fenomeni "naturali" e a mettere in rilievo il ruolo dell'interazione tra le diverse componenti di un processo.

Automi e reti di automi

Prima di fare esempi pratici è opportuno trattare alcune questioni riguardo al più generale concetto di automa. In matematica e logica un automa è un formalismo che consente di descrivere il comportamento di una "macchina"; esso può essere descritto dai seguenti elementi:

- un insieme di informazioni (dati, comportamenti, stimoli) in ingresso;
- un insieme di informazioni in uscita;
- un insieme di stati interni.

Un automa è quindi una sorta di "scatola chiusa" che riceve informazioni dall'esterno, compie alcune azioni, e restituisce altre informazioni. Le azioni si basano sulle regole che definiscono le relazioni tra ingresso, stato interno e uscita. Gli stati interni rappresentano la situazione del sistema ad un dato istante, e costituiscono la "memoria" dell'automa, consentendo ad esso di "ricordare" la risposta da fornire a determinati ingressi.

Un automa è dunque un oggetto con un input ed un output. Dato un certo input dà sempre lo stesso output, che viene anche detto *stato dell'automa*. Al suo interno ha delle regole che gli permettono di associare input e output [Fig.1].

Figura 1: Automa: le regole trasformano l'input in output.

Più automi possono essere connessi in modo che l'output di un automa sia l'input di un altro automa. Si forma in questo modo una rete di automi [Fig. 2]. La dinamica della rete viene descritta dallo stato di ogni automa in ciascun periodo di tempo.

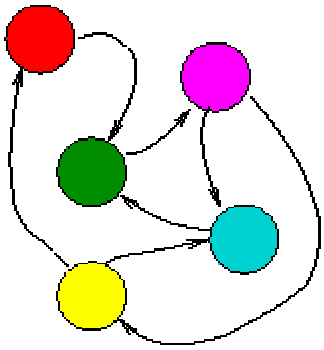


Figura 2: Rete di automi.

Elementi che costituiscono un automa cellulare

L'idea base del concetto di automa cellulare è, come già accennato prima, quella che da interazioni semplici scaturiscono comportamenti complessi.

Un automa può essere definito come una struttura topologica costituita da una *griglia* e da un *intorno.*

Introduciamo ora i dati che permettono di comprendere le caratteristiche di un generico automa cellulare:

<u>IL RETICOLO Γ (O GRIGLIA)</u>

Nello spazio R^d (dove *d* è la dimensione dello spazio nel quale si trova l'automa cellulare, ove solitamente *d* = 3) viene considerato un insieme di *cellule* (o *celle*), disposte in genere su un *reticolo* Γ.

Esempi:

Se d = 1 le celle dell'automa sono solitamente disegnate nel seguente modo [Fig.3]:

Figura 3: Automa monodimensionale lineare

Se d = 2 le celle possono essere di vario tipo [Fig. 4]:

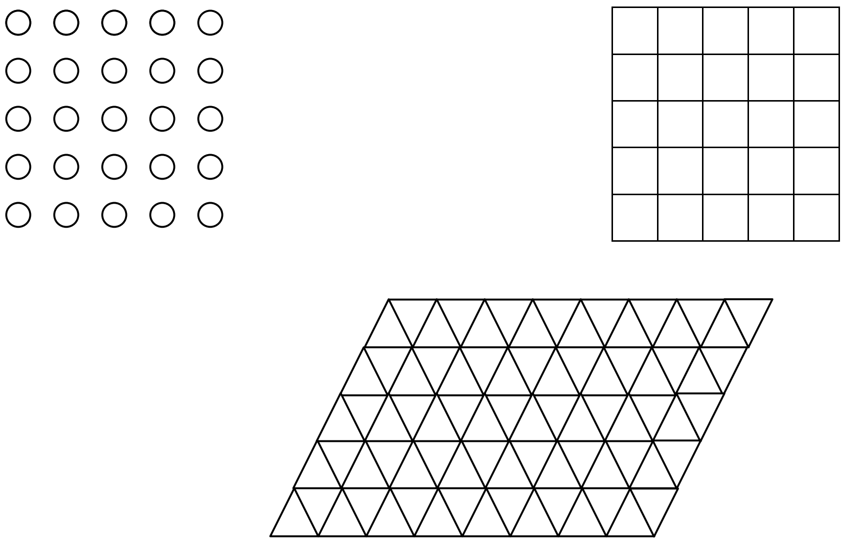


Figura 4: Alcuni esempi di strutture di automi bidimensionali

Se infine d =3 le celle sono solitamente rappresentate con cubi o parallelepipedi.

Si noti che ogni cellula può essere univocamente individuata assegnandole d numeri interi indicando la loro posizione nella griglia (assumiamo per semplicità una *maglia* unitaria) $i_1,\dots,i_d \in$ Z: nel caso monodimensionale [Fig.5], per esempio, basta stabilire quale cella etichettare con 0 e in quale direzione mettere i numeri positivi:

...	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	...

Figura 5: Esempio di automa monodimensionale lineare

Nel caso bidimensionale basta invece stabilire quale cella etichettare con (0,0) e quali sono le due direzioni positive (come in un sistema di assi cartesiani). La posizione di una cella viene dunque indicata con due indici (i,j), per cui la cella a sinistra sarà $(i,j - i)$, quella a destra $(i, j + i)$ e via di seguito.

Se il reticolo Γ è Γ = Z^d, e quindi con un numero infinito di punti e senza bordi, si ha un problema di implementazione pratica in un calcolatore. In questi casi allora, invece di un reticolo infinito, si fanno le seguenti scelte:

1. Identificazione dei bordi (sistema periodico):

Possiamo spiegare l'idea, nel caso monodimensionale, con la seguente figura [Fig.6]:

…	0	+1	+2	0	+1	+2	0	+1	…

Figura 6: Automa monodimensionale lineare periodico

Ossia Γ consiste dei punti 0,1,2,… ripetuti nel modo sopra indicato.
In altre parole è come pensare le sole celle distinte (0,1,2 nel precedente caso) poste su un "cilindro" [Fig.7] o, ancora, immaginare tali celle disegnate su una striscia di carta i cui bordi opposti siano poi tra loro incollati.

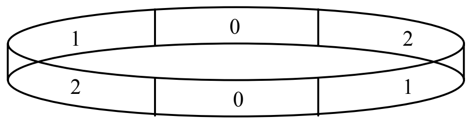


Figura 7: Automa monodimensionale lineare periodico: rappresentazione a cilindro

Nel seguente caso bidimensionale [Fig.8]:

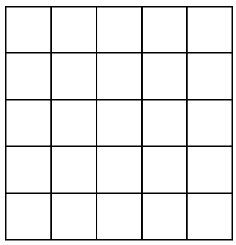


Figura 8: Automa bidimensionale periodico

lo stesso tipo di idea può essere applicato facendo coincidere i lati opposti e ottenendo quindi una struttura toroidale [Fig.9].

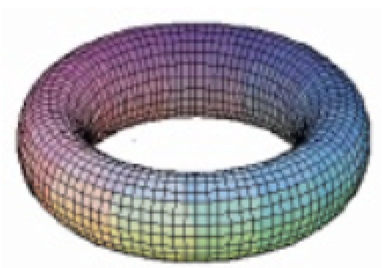


Figura 9: Automa bidimensionale periodico: rappresentazione a toroide

2. Riflessione delle celle di bordo:

Consideriamo per esempio il caso monodimensionale $\Gamma = Z$. Nel caso di riflessione delle celle del bordo distinguiamo tra celle *interne* e celle *di bordo*: nel seguente caso la cella 1 è interna mentre le celle 0 e 2 sono di bordo:

...	0	0	0	0	+1	+2	+2	+2	...

Figura 10: Automa monodimensionale lineare: riflessione delle celle di bordo

Come espresso in modo simbolico dal disegno [Fig.10] lo stato delle celle a sinistra della cella 0 avranno sempre lo stesso stato della cella di bordo 0 e lo stato delle celle a destra della cella 2 avranno sempre lo stesso stato della cella di bordo 2.

3. Bordo costante:

Si stabilisce che lo stato del bordo è costante, non ha cioè nessuna evoluzione temporale (conviene allora fissare tale stato costante ad un valore particolare che indichi "stato non significativo"). Essa è usata anche in urbanistica, dove la necessità di limitarsi ad un'area finita è anche legata ai dati sperimentali che, ovviamente, riguardano solo un'area limitata.

In urbanistica considerare un bordo senza evoluzione temporale vuol quindi dire affermare che la zona del territorio rappresentata dal bordo non rientra in realtà nell'area di studio e che quindi la simulazione andrà guardata solo "lontano dal bordo". In realtà questo tipo di scelta va ben analizzata, perché assumere un bordo costante non è senza conseguenze sullo stato delle celle interne. Questo tipo di condizione al bordo è particolarmente naturale per i cosiddetti "gas models" in cui il bordo viene ad avere l'interpretazione del recipiente che contiene un gas opportunamente simulato dall'AC.

GLI INTORNI

Si assume che una qualsiasi cella $i \in \Gamma$ interagisca solo con un certo insieme U (i) di altre celle (ad esempio quelle immediatamente vicine). In tal caso $U(i) = \{i - k, i, i + k\}$, dove k è un numero costante che esprime l'*ordine* dell'intorno ($|U(i)| = K$).

Esempi:

Nel caso monodimensionale (con $\Gamma = Z$) assumendo di avere $U(i) = \{i - 1, i, i + 1\}$, facendo riferimento ad un reticolo con la seguente struttura [Fig.11]:

…	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	…

Figura 11: Automa monodimensionale lineare

l'intorno assume i valori $U(2) = \{1,2,3\}$. Si noti che $U(i)$ contiene sempre la cella stessa, cioè $i \in U(i)$ (possiamo per esempio pensare che ogni cella rappresenti una molecola in un cristallo che interagisce magneticamente solo con quelle più vicine e che le interazioni con quelle più lontane siano trascurabili).

I tipi di intorno maggiormente considerati sono quelli di von Neumann e di Moore [Fig.12], di seguito rappresentati per il caso bidimensionale per due valori del raggio (r=1 e r=2):

von Neumann **Moore**

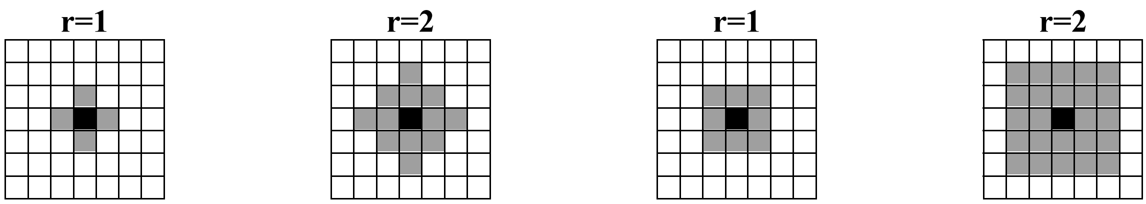


Figura 12: Intorni di von Neumann e di Moore nel caso di automi bidimensionali

Se $\Gamma = Z^d$, ogni cella è rappresentata da d numeri interi.
La definizione generale degli intorni di **von Neumann** è:

$$U(i_1,\dots,i_d) = \{(j_1,\dots,j_d) \ : \ |j_1 - i_1| + \dots + |j_d - i_d| \le r\}$$

Mentre quella degli intorni di **Moore** è:

$$U(i_1,\dots,i_d) = \{(j_1,\dots,j_d) \ : \ |j_1 - i_1| \le r \text{ e } \dots \text{ e } |j_d - i_d| \le r\}$$

Nel caso monodimensionale $d = 1$ essi quindi coincidono.

Per specificare un generico intorno come il seguente [Fig.13]:

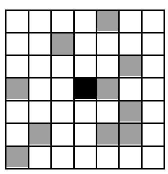


Figura 13: Automa bidimensionale con intorno generico

in generale occorre dare le coordinate di ogni cella facente parte dell'intorno stesso.

Nei problemi di urbanistica gli intorni possono variare molto da cella a cella. Per questa ragione sono spesso inadatti gli AC che prevedono tipologie di intorni indipendenti dalle celle.

Per la definizione degli intorni delle celle di bordo in caso di Γ finito, bisogna stare attenti in determinate circostanze:

1. nel caso di **identificazione dei bordi**, considerando le celle poste su un "cilindro" [Fig.14]

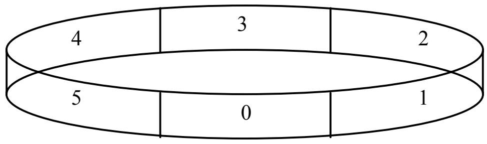


Figura 14: Automa monodimensionale periodico

se si considerano i "primi vicini", allora abbiamo per esempio $U(0) = \{5,0,1\}$, $U(1) = \{0,1,2\}$ e $U(5) = \{4,5,0\}$.

2. Nel caso della **riflessione dei bordi**, facendo riferimento per semplicità alla struttura [Fig.15]:

...									...
	0	0	0	0	+1	+2	+2	+2	

Figura 15: Automa monodimensionale con riflessione dei bordi

si può dedurre che $U(1) = \{0,1,2\}$, $U(0) = \{0,1\}$, $U(2) = \{1,2\}$ e che tutte le rimanenti celle vanno considerate vere e proprie copie delle celle 0 e 2, quindi con gli stessi intorni sopra specificati.

3. Infine, nel caso di **bordi costanti**, occorre distinguere tra celle interne e di bordo. Per quest'ultime non è importante definirne un intorno, perché esse non hanno evoluzione. Per le celle interne, invece, occorrerà fare in modo che l'evoluzione non dipenda dallo stato delle celle di bordo, proprio perché questo è ritenuto "non significativo".

L'INSIEME DEGLI STATI

Ad ogni cella è attribuito uno "stato", che esprime una sua qualità. Gli stati sono per ipotesi in numero finito.

Chiameremo *S* l'insieme degli stati, detto anche "spazio degli stati" o "alfabeto". Nel seguito si useranno le seguenti notazioni:

$\sigma(i) = \sigma_i \in S$: "stato della cella *i* ", prende valori in un insieme finito *S.*

Esempi:

- In sociologia la cella *i* potrebbe indicare un individuo ed il suo stato $\sigma(i)$ alcune sue qualità $\sigma(i)$ = (età, colore dei capelli, nazionalità,…).
- Un semplice caso si ha quando $S = \{0,1\}$, dove lo stato 1 potrebbe indicare "cella occupata" e lo stato 0 "cella libera" (oppure, in sociologia "individuo occupato o disoccupato").
- In un dato territorio lo stato di una cella potrebbe essere rappresentato dal numero di animali ivi presenti o dal tipo di copertura forestale (per esempio "bosco", "coltivato", "erba" o un dato numerico indicante il numero di piante di un dato tipo).
- In urbanistica lo stato di una cella potrebbe essere rappresentato dall'utilizzo maggiormente presente in tale cella. In altre parole se σ_i = "abitazioni private", allora si intende che nella cella *i* l'utilizzo maggiormente presente è rappresentato proprio da abitazioni private.
- Un altro possibile stato usato in urbanistica è dato da grandezze con più componenti ("vettori") del tipo ad esempio (a,i,l,c,v,γ), dove i primi 5 numeri rappresentano la percentuale della superficie della cella occupata rispettivamente da abitazioni, industrie, suolo libero, attività commerciali e verde pubblico. Il numero γ indica invece il costo del terreno edificabile. Si noti che se si vincola le variabili a,i,l,c,v,γ ad assumere valori appartenenti ad un insieme finito, allora l'insieme *S* di tutti i possibili stati è ancora finito.
- In urbanistica nello stato di una cella può essere interessante mettere anche misure relative alla densità della popolazione, eventuali restrizioni legali nell'uso del territorio o la qualità del suolo. E' inoltre normale considerare una serie di "stati fissi", non aventi cioè nessuna evoluzione temporale, come presenza di fiumi, laghi, zone ad elevata pendenza o protette dal punto di vista ambientale.

LA CONFIGURAZIONE LOCALE

La configurazione locale è la possibile distribuzione degli stati delle celle in un intorno ed è una funzione tra le celle dell'intorno e l'insieme degli stati.

Dato un insieme di stati S, supponendo che all'interno di S ci siano *s* stati, quindi $|S|=s$ l'ordine CL della configurazione locale per un intorno $|U(i)| = k$ è definito dalla seguente espressione:

$$|CL| = |S|^{|U,i|} = s^k$$

Esempio:

Nel caso di un automa ad una dimensione con intorno di raggio 1, l'ordine k dell'intorno è uguale a 3 e l'intorno è $U(i) = \{i-1, i, i+1\}$.
Per un insieme degli stati S = {0,1}, dunque s=2, si ottiene una CL composta da $s^k = 2^3 = 8$ combinazioni.

La distribuzione degli stati è la seguente:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
a a a	a a b	a b b	b b b	b b a	b a a	b a b	a b a

LE REGOLE DI EVOLUZIONE

Si introduce una "dinamica" nel modello, cioè delle regole per precisare come gli stati delle celle evolvono nel tempo.

Le regole di evoluzione descrivono il passaggio dallo stato $\sigma_i\,(t)$ = "stato della cella *i* al tempo *t*" a quello $\sigma_i\,(t+1)$ al tempo $t+1$. Si noti, quindi, che il tempo in un AC è per ipotesi discreto $t = 0,1,2,3,\ldots$

Infine la regola di evoluzione viene assunta dipendere solo dagli stati $\sigma_j\,(t)$ per $j \in U\,(i)$, cioè solo dagli stati delle celle *j* vicine a *i* (nel senso di appartenenti all'intorno prefissato $U\,(i)$ di *i*.

Concretamente se gli intorni sono tutti costituiti da *n* celle, allora le regole di evoluzione di un AC sono date da una funzione:

$$\rho : S^{\,n} \rightarrow S$$

che agli stati delle *n* celle presenti nell'intorno di una cella fa corrispondere lo stato successivo (ricordiamo che $S^{\,n}$ denota l'insieme delle *n*-uple $(s_1,\ldots,s_n)$, *con* $s_1 \in$ S).
Saranno analizzati successivamente alcuni esempi.

Le *caratteristiche fondamentali* di un automa cellulare sono le seguenti:

1. Parallelismo: le celle si aggiornano simultaneamente (in parallelo) elaborando ognuna le informazioni ricevute e passando nello stato conseguente.
2. Località: il nuovo stato cui giunge la cella al tempo t+1 dipende solo dal suo stato e da quello delle celle appartenenti al suo intorno e al tempo t.
3. Omogeneità: ogni cella è aggiornata in base alle stesse regole.

LEGGE LOCALE

E' una funzione tra l'insieme di tutte le possibili configurazioni locali e l'insieme degli stati. Se la cella focale si trova in mezzo a una certa configurazione, passa ad uno stato dato da *f* con

$$f : CL \rightarrow S$$

Si definisca s(t) lo stato *f* (s(t) $\in$ S) in cui si trova una cella data *c* al tempo *t*.
Se al tempo t la cella *c* è nello stato 0, s(t) = 0, al tempo (t+1) il nuovo stato della cella sarà:

$$s(t+1) = f(x)$$

Automi su una griglia spaziale

Se prendiamo più automi e diamo loro una localizzazione spaziale è possibile stabilire le connessioni in base alla distanza. In altre parole automi vicini saranno connessi in qualche modo e automi lontani non saranno connessi. Questo aspetto rimanda al calcolo della distanza e quindi alla definizione di una metrica sullo spazio.

Lo spazio fisico ha varie dimensioni:

1. zero dimensioni, un punto;
2. una dimensione, una linea;
3. due dimensioni, un piano o un poligono;
4. tre dimensioni, lo spazio o un solido.

Esistono poi oggetti con una dimensione che non è necessariamente intera. Si tratta degli oggetti frattali, che hanno una grande importanza nello studio della forma urbana, la cui geometria, come del resto quella di molti oggetti dovuti a crescite spontanee, viene meglio descritta dalla geometria frattale che da quella euclidea.

Automi nello spazio a 1 dimensione

Gli automi cellulari sono particolarmente efficaci per descrivere fenomeni complessi che hanno luogo nello spazio.

Un automa cellulare può essere visto come una matrice di celle quadrate che evolvono in un dato tempo; ad ogni istante ciascuna cella si trova in uno stato che appartiene ad un insieme finito di stati possibili.

Al tempo (t+1) il cambiamento di stato di una cella dipende dallo stato delle celle "vicine" al tempo precedente (t) e il contenuto di una cella viene aggiornato in base ad una regola fissata che dipende dal contenuto della cella stessa e dal contenuto delle celle con cui può comunicare (quello che è stato precedentemente definito "intorno" della cella).

Ad ogni passo (ciclo) il contenuto di tutte le celle viene aggiornato *simultaneamente* in parallelo.

Il modo più semplice per comprendere la dinamica spazio temporale è quello di utilizzare uno spazio ad una dimensione. Gli automi sono localizzati lungo questo spazio, come delle città localizzate lungo una unica via.

Questa situazione si rappresenta , come s'è detto in precedenza, con una fila di celle [Fig.16]. Ogni cella è un automa e quindi ha un output ossia uno stato ad essa associato. Supponiamo che questo stato possa assumere i valori zero o uno, in cui uno corrisponde a cella edificata (rossa) e zero a cella libera [azzurra]. Ogni cella per modificare il suo stato ha bisogno di un input che proviene dalle celle vicine, in questo caso dalla cella di destra e da quella di sinistra.

Le due celle rappresentano l'intorno della cella. Il loro stato al tempo t viene utilizzato come input dalla cella centrale per calcolare il suo stato al tempo $t+1$.

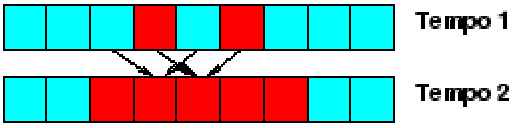


Figura 16: Evoluzione di un automa monodimensionale. In orizzontale lo spazio, in verticale il tempo

Il modo in cui viene calcolato usualmente lo stato dell'automa al tempo successivo è spiegato nell'esempio seguente. Rappresentandolo con il suo stato, l'automa della figura precedente si presenta nel modo seguente:

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 0 0 1 0 1 0 0 0
```

La regola che permette di calcolare lo stato dell'automa al tempo $t+1$ è la seguente: si considerano per ogni cella di posizione (x), gli stati delle due celle confinanti con la cella in questione, di posizione (x-1, x+1) e

1. se almeno una delle due celle dell'intorno ha valore 1, allora la cella in questione prenderà valore 1;

3. se tutte e due le celle dell'intorno hanno valore zero, allora la cella centrale prenderà valore zero.

Quindi, tralasciando le due celle al bordo, (la 1 e la 9) si inizia dalla numero 2.

Si vede che questa ha due celle confinanti con uno stato uguale a zero e, quindi, essa prenderà al tempo $t+1$ il valore zero. Questo valore viene memorizzato, ma non influisce sul calcolo dello stato delle altre celle, perché queste reagiscono allo stato delle celle al tempo t.

Quindi si passa alla cella 3 e si vede che ha una cella a sinistra uguale a 1. Quindi al tempo $t+1$ prenderà il valore 1. Con lo stesso metodo la cella 4 ha due celle confinanti in stato zero e quindi al tempo $t+1$ prenderà valore zero. Si continua così sino alla cella 8.

Le celle del bordo si suppone rimangano sempre con lo stesso stato (bordi costanti).

Al tempo successivo si ha la seguente distribuzione di stati:

```
1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 0 0 1 0 1 0 0 0  t
0 0 1 0 1 0 1 0 0  t+1
0 1 0 1 0 1 0 1 0  t+2
```

Utilizzando gli stati al tempo $t+1$ si calcolano con lo stesso metodo gli stati al tempo $t+2$.

Poiché questo metodo prevede di aggiornare gli stati di tutte le celle al medesimo istante viene detto *sincrono*. Se, al contrario, avessimo aggiornato lo stato della cella appena calcolato, avremmo avuto un metodo di calcolo *asincrono*. In questo secondo caso è evidente che il risultato finale è influenzato dall'ordine col quale si scelgono le celle. Generalmente viene scelto un ordine *casuale*.

Automi in uno spazio a 2 dimensioni

Nel caso dello spazio a due dimensioni un automa, come s'è visto, viene rappresentato con celle quadrate disposte su una griglia. Ogni cella, anche in questo caso, ha un stato che dipende dallo stato delle celle intorno. Questo intorno (von Neumann o Moore) può essere definito in vari modi: 4 celle, 8 celle e oltre. Assumendo che non ci sia differenza tra le celle poste in alto o in basso, a destra o a sinistra, spesso si sommano gli stati delle celle nell'intorno. Questa somma diviene un unico input per la cella centrale che, in base ad esso, ed eventualmente anche al proprio stato al tempo t, stabilisce lo stato al tempo $t+1$.

Per stabilire lo stato della cella si confronta questa somma con una soglia stabilita e, se la somma risulta maggiore, allora la cella prende uno stato 1, altrimenti 0. Questo tipo di automi vengono detti *totalistici*.

Questo rapporto tra somma e stato della cella si può sintetizzare in un grafico a scalino [Fig.17 - grafico a sinistra] nel quale sulle ascisse è riportata la somma degli stati dell'intorno di otto celle al tempo t e sulle ordinate lo stato della cella centrale al tempo $t+1$.

Ovviamente questo non è l'unico grafico possibile. Se si considera, infatti, il famoso gioco Life, di cui tratteremo più ampiamente in seguito, il grafico che sintetizza le regole di trasformazione ha una struttura a gradino [Fig. 17 - grafico a destra].

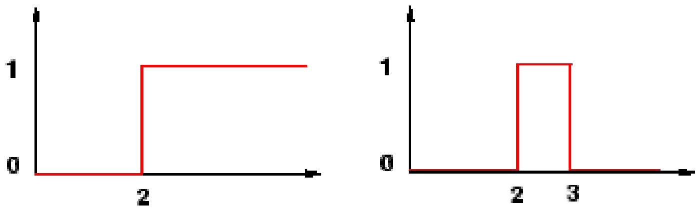


Figura 17: Relazione tra il valore della somma degli stati dell'intorno (in ascissa) e lo stato della cella (in ordinata). A sinistra un automa a soglia, a destra il gioco Life.

Inoltre, lo scalino [Fig.17 - grafico a sinistra] può essere al contrario, condizione per cui una cella può passare in stato 1 solo se quelle circostanti in stato uno sono inferiori ad un certo numero soglia.

Un caso molto interessante è quello dei modelli basati sulla diffusione delle infezioni. In questo caso, se una cella è malata, può infettare qualsiasi cella vicina con cui si trovi a contatto. Ogni cella sana ha probabilità di essere contagiata. Se non viene contagiata per uno o più periodi si può supporre che non sarà più contagiata. Si ottengono aggregazioni di celle malate (in stato uno, rosse) molto simili a quelle tipiche dei centri urbani [Fig. 18].

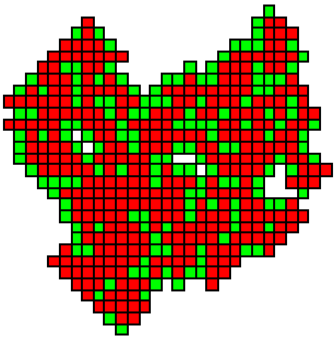


Figura 18: Automi in due dimensioni. Sviluppo di un cluster per contagio, con una probabilità di contagio pari a 0.34. Rosso: contagiato , verde: non contagiato.

Esempio:

Supponendo di avere delle celle il cui stato sia zero o uno con valore soglia pari a 3, la regola dice che se la somma degli stati delle cinque celle è superiore o uguale a 3, allora la cella centrale prende uno stato pari ad uno, altrimenti il suo stato è zero. Il risultato si può vedere nelle figure seguenti [Fig.19 e 20].

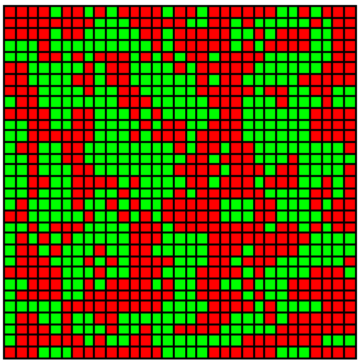


Figura 19: Automa in due dimensioni a maggioranza: stato iniziale.

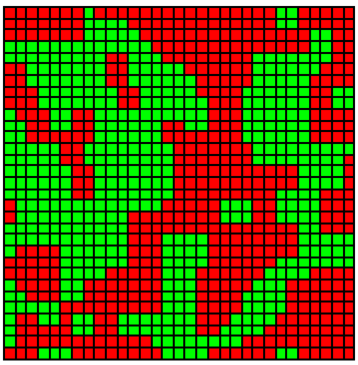


Figura 20: Automa in due dimensioni a maggioranza: stato dopo 30 iterazioni.

Analogamente, quando si usano questi sistemi per studiare la dinamica urbana, lo stato della cella, (ad esempio edificato, non edificato) viene stabilito considerando una funzione dipendente dall'intorno, che è generalmente una combinazione lineare degli stati dell'intorno e dove, se il valore assunto da questa funzione è superiore ad una certa soglia, allora la cella passa allo stato edificato. Ovviamente questa è una versione molto semplificata.

Automi in uno spazio a 3 dimensioni

Gli automi cellulari possono essere definiti su una griglia a tre dimensioni. In questo caso l'intorno delle celle confinanti con quella centrale è di 26 celle (3x3-1).

Molte ragioni fanno ritenere questo tipo di automi utili per lo studio dei sistemi urbani.

1. il terreno si può presentare con la sua altezza;
2. l'ambiente urbano costruito si presenta più vicino alla realtà;
3. la densità di edificazione in ogni cella può facilmente variare;
4. si può ottenere la mescolanza degli usi del suolo in una stessa cella

Automi vincolati

In tutti i casi sopra elencati si può stabilire una statistica sommando le celle in stato uno (oppure in stato zero) e osservando questa misura in ogni periodo. Ci si accorge così che ogni regola produce una sua dinamica, la quale può essere dipendente da qualche particolare parametro, come per esempio la probabilità di applicare la regola. Ora, questo va bene nel caso di una infezione nella quale il numero totale degli infetti è determinato solo dalle occasioni di contatto tra malati e sani, ma non va bene nel caso di una città nella quale il numero totale di edifici dipende dalla popolazione e dalle attività economiche e, l'ammontare di queste ultime, è in genere stabilito da fattori esterni alla città, come ad esempio la domanda esterna.

In questo caso bisogna supporre che il totale delle celle edificate sia dato o previsto, ad esempio, usando un modello simile a quello presentato nella sezione precedente che non sia determinato dalla dinamica spaziale del sistema. Abbiamo quindi dei sistemi il cui risultato globale è *vincolato*, mentre la distribuzione spaziale è stabilita in base alle regole di interazione. Vi sono vari modi di ottenere questo.

Una possibilità è quella di far variare uno dei parametri che governa l'applicazione delle regole del sistema, quando si sa che questo parametro influenza il risultato finale. In uno dei casi precedenti è la probabilità di applicazione della regola. Per fare questo occorre conoscere con una certa esattezza in che modo il risultato finale viene influenzato dalla applicazione del parametro.

Un'altra modalità consiste nel considerare la somma degli stati delle celle dell'intorno come una potenzialità di trasformazione. Il totale desiderato viene distribuito in base alla potenzialità con un criterio probabilistico. In questo modo le celle con un più alto potenziale di trasformazione avranno la maggiore possibilità di trasformarsi.

Un modo simile al precedente, ma più rigido, consiste nell'ordinare le celle in base alla potenzialità dal valore maggiore a quello minore e, quindi, di assegnare gli stati a partire dalla prima cella sino a che la quantità desiderata non sia stata esaurita.

Nel caso della dinamica urbana le celle possono prendere un numero di stati variabili, quali ad esempio: terreno abbandonato, strada, fiume, parco, edificato etc.

La possibilità di passare da uno stato ad un altro può dipendere da una combinazione lineare della somma del numero di celle in ciascuno stato nell'intorno della cella centrale. In questo caso i fattori che moltiplicano le varie somme rappresentano l'importanza di un certo stato in relazione ad un altro.

Automi cellulari lineari: regole di transizione totalistica

Nella speranza di raggiungere una maggiore comprensione analitica e sintetica delle dinamiche di evoluzione degli automi cellulari, alcuni ricercatori (in particolare Stephen Wolfram allo Institute for Avanced Study di Princeton) hanno rivolto la loro attenzione agli AC più semplici sia per geometria che per topologia delle interconnessioni necessarie allo scambio di informazioni di stato, gli automi cellulari lineari.

Un automa cellulare lineare è, come si è detto, costituito da una sequenza monodimensionale – finita o infinita – di cellule che "comunicano" il proprio stato a cellule appartenenti al proprio intorno: per intorno simmetrico di dimensione *r* ribadiamo che si intende l'insieme costituito dalle *r* cellule a destra e dalle *r* cellule a sinistra di una cellula della sequenza, a cui appartiene sempre anche la cellula a cui si fa riferimento. Un automa cellulare lineare è caratterizzato, oltre che dalla dimensione *r* del proprio intorno, da un l numero di stati distinti *k* che ogni cellula può assumere e dalla regola – rigidamente deterministica – che ogni cellula applica ad ogni istante discreto di tempo per calcolare il suo prossimo stato in funzione del suo stato attuale e di quello di tutte le cellule del suo intorno.

Come si deduce svolgendo un semplice calcolo combinatorio il numero di regole possibili è $k^{k(2r+1)}$; molti ricercatori hanno concentrato la loro attenzione su un particolare tipo di regole chiamate regole *totalistiche*: una regola totalistica stabilisce il nuovo valore di stato della cellula (un numero compreso tra 0, incluso, e k, escluso) in funzione della somma dei valori di stato di tutte le cellule appartenenti al proprio intorno (che comprende la cellula stessa); le regole *totalistiche* possibili sono k(2r+1). Una regola totalistica può essere facilmente rappresentata e codificata. Prendiamo come esempio il caso di un automa lineare con r=1 e k=3: i possibili valori ottenuti dalla somma dei valori di stato delle cellule appartenenti ad un intorno sono 0,1,2,3,4,5,6 e la seguente è solo una tra le possibili regole di transizione totalistiche

6	1
5	2
4	0
3	1
2	1
1	2
0	0

In un programma di simulazione una regola totalistica viene comunemente implementata in questa forma vettore, ma nella letteratura sull'argomento si trova generalmente codificata in forma numerica: l'esempio precedente con r=1 e k=3 diviene 1201120_3 si noti che il numero di stati k riportato come indice è indispensabile per decodificare la regola, la dimensione r dell'introno è invece ricavabile dal numero di cifre che compone la codifica della regola una volta noto k).

La simulazione di un sistema di questo tipo consiste generalmente nella visualizzazione della configurazione dei singoli stati di tutte le cellule dell'automa (per evitare "distorsioni a margini" dovute al numero di cellule finito si considerano contigui gli estremi sinistro e destro della sequenza).

Convenzionalmente le configurazioni di stato corrispondenti ad istanti successivi sono visualizzate contemporaneamente e contiguamente: sullo schermo del PC si ottiene in questo modo la storia "per generazioni" dell'automa (formalmente si tratta di una rappresentazione grafica in 3D dove alle 2 variabili indipendenti – spazio e tempo – corrispondono le 2 dimensioni dello schermo e alla variabile dipendente – lo stato – corrisponde una codifica per colori).

Un programma che visualizzi l'evoluzione nel tempo di un automa cellulare lineare con regola di transizione totalistica può essere ad esempio costituito da due cicli "concentrici": il più esterno implementa il trascorrere del tempo come successione di istanti discreti e, al suo interno, un secondo ciclo effettua la scansione completa dello spazio lineare delle cellule (un vettore monodimensionale) per applicare ad ognuna di esse la regola di transizione (in realtà il calcolo della regola richiede una scansione di tutte le cellule del suo intorno e, di conseguenza, un ciclo ulteriore).

Le leggi di Wolfram

Vediamo ora quante sono le possibili leggi di un automa cellulare monodimensionale con r=1.

Come analizzato in un paragrafo precedente, data una cella nella posizione x, per decidere lo stato di x nell'istante successivo (1 o 0, cioè acceso o spento) dobbiamo considerare la terna di celle di posizioni x-1, x, x+1. Questa terna può essere in 1 di 8 diversi stati che possiamo rappresentare con i numeri decimali 0, 1, ..., 7, corrispondenti rispettivamente alle loro espressioni binarie di 3 bit 000, 001, ... , 111.

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	110	100	101	110	111
0	1	0	1	1	0	1	0

Nella riga centrale ci sono gli 8 possibili stati delle 3 celle contigue di posizione x-1, x, x+1; nella prima riga ci sono i corrispondenti valori decimali. Una legge è specificata in modo univoco se nella terza riga si mette una serie di 8 0 o 1.

Nel caso della tabella di sopra, per esempio, se x-1 è accesa, x è spenta, x+1 è spenta (terna 100 corrispondente al numero decimale 4), leggiamo il bit che sta sotto a 100 e troviamo 1; questo significa che all'istante successivo la cella sarà accesa, e così per tutti gli altri casi. Poiché una legge è identificata da una stringa di 8 bit vi sono 2^8=256 leggi unidimensionali con r=1: queste leggi si possono identificare con un numero.

Nel caso dell'esempio se scriviamo di seguito i bit della terza riga otteniamo 01011010. Interpretiamo questa scritta come la rappresentazione binaria di un numero la cui espressione decimale sarà quindi (si legge da destra a sinistra)

$0x2^0+1x2^1+0x2^2+1x2^3+1x2^4+0x2^5+1x2^6+0x2^7=90.$

Questo numero è il cosiddetto numero della legge di Wolfram. Le 256 leggi di Wolfram per r=1 si possono dunque indicare con un numero decimale da 0 a 255. La legge 0 porta qualsiasi condizione iniziale nello stato spento costantemente; al contrario la 255, fatta tutta di 1, porta qualsiasi condizione iniziale nello stato acceso costantemente.

Automi cellulari monodimensionali con 3 celle nell'intorno

Wolfram determinò attraverso moltissimi esperimenti e considerazioni teoriche basate sulla meccanica statistica 4 tipi diversi di evoluzione degli automi. Tutte le considerazioni teoriche hanno un valore esatto solo nel caso di automi di lunghezza infinita. Nella pratica la lunghezza dell'automa è un certo numero n finito (nei nostri esempi vi sono 400 celle linearmente affiancate, cioè n=400) e inoltre l'automa si chiude su se stesso, si tratta cioè di un anello piuttosto che di un segmento. Nel caso finito di n celle possono esistere in tutto 2^n configurazioni (nell'esempio 2^{400}, un numero enorme) e pertanto una di esse prima o poi si ripete e da quel punto in poi la struttura diventa periodica.

La classificazione di Wolfram:

Classe 1 L'evoluzione dopo qualche passo porta ad uno stato omogeneo che è indipendente dalle condizioni iniziali.

Un esempio è dato dalla legge 160 che conduce sempre allo stato nullo.

Classe 2 L'evoluzione dopo poco porta a uno stato formato da semplici strutture separate stabili o periodiche con periodo assai più piccolo del massimo periodo 2^n. Queste configurazioni non sono indipendenti dalle condizioni iniziali. Invece è relativamente indipendente da esse la struttura delle configurazioni periodiche risultanti.

Un esempio tipico è la legge 1.

Classe 3 L'evoluzione porta a uno stato caotico, cioè a strutture prive di qualsiasi periodicità. Con questo intendiamo, nel caso finito, che la periodicità (che, come osservato sopra, esiste per forza) non è assai più piccola di 2^n.

La prima legge che si trova in questa classe è la 105.

Classe 4 L'evoluzione porta a strutture complesse e irregolari che possono essere localizzate o apparire lungo la dimensione temporale in movimento.

Si veda come esempio la legge 110.

Altri esempi:

- la legge 96 porta ad uno stato omogeneo nullo.
- La legge 4 porta ad uno stato periodico.
- La 101 porta ad uno stato caotico.
- La 225 è del tipo 4.

La legge 90 e la legge 150 sono "*additive*". Per esse partire dallo stato "centrato" porta a configurazioni piacevoli e ordinate simili al *triangolo di Sierpinski*. Per comprendere che cosa significhi additive pensiamo che lo stato iniziale I_0 è una stringa formata da 0 e 1. In corrispondenza di questo stato si crea una certa evoluzione Ev_0. Se prendiamo un altro stato iniziale I_1 si ottiene un'altra evoluzione Ev_1. Ora le stringhe di 0 e 1 si possono sommare elemento per elemento con questa regola (detta somma modulo 2):

0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=0.

La legge è additiva se a partire dallo stato iniziale I_0+I_1 si ottiene l'evoluzione Ev_0+Ev_1.

La legge 90, in particolare, è spesso citata, anche perché ha una descrizione in termini di logica: il bit assunto da una cella è semplicemente lo XOR dei due bit sopra di lei, quello a sinistra e quello a destra (non dipende dal proprio stato precedente): la cella si accenderà (diventerà 1 o nera) allo stato successivo, solo se in quello attuale, le due celle dell'intorno sono una accesa e una spenta (cioè una oppure - XOR - l'altra può essere attiva).

Automi cellulari monodimensionali con 4 celle nell'intorno

L'intorno della cella è costituito da 4 stati adiacenti comprendenti la cella stessa.

Un intorno è rappresentato quindi da 4 bit e ci sono 2^4=16 possibili intorni. Ragionando in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo precedente ci sono 2^{16}=65536 possibili leggi di Wolfram che si potrebbero rappresentare con i numeri decimali da 0 a 65535.

Per facilitare però la memorizzazione della legge e semplificare la generalizzazione ad un numero di stati più elevato, si può scegliere la notazione esadecimale. Gli interi verranno rappresentati in base 16, così invece di avere 10 cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ne abbiamo 16:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f.

Così 15 è f, 10 è a, 12 è c.

Si può passare dalla rappresentazione binaria a quella esadecimale dividendo la prima in gruppi di 4 cifre (che quindi sono i numeri da 0 a 15) e sostituendo ad essi l'opportuna cifra esadecimale.

Esempio:
la legge 90 scritta in binario è 01011010, formata dai due 4-blocchi 0101 e 1010; essa diventa dunque 5a.

Con 4 intorni, come abbiamo osservato, le leggi sono a 16 bit corrispondenti a 4 4-blocchi. Ognuna di esse è dunque rappresentata in modo univoco da una stringa di 4 cifre esadecimali.

Automi cellulari unidimensionali con 5 celle nell'intorno

L'intorno della cella è costituito da 5 stati adiacenti comprendenti la cella stessa.

Un intorno è rappresentato quindi da 5 bit e ci sono 2^5=32 possibili intorni. Ci sono dunque 2^{32}=42.949.967.296 possibili leggi di Wolfram che si potrebbero rappresentare con i numeri decimali da 0 a 42.949.967.295. Anche in questo caso, per facilitare la memorizzazione della legge e semplificare la generalizzazione ad un numero di stati più elevato, scegliamo la notazione esadecimale della quale abbiamo parlato nella nel paragrafo precedente. Con 5 intorni, le leggi sono a 32 bit corrispondenti a 8 4-blocchi. Ognuna di esse è dunque rappresentata in modo univoco da una stringa di 8 cifre esadecimali.

Esempio:

Stringa bf8a18c8.

In binario bf8a18c8 = 10111111100010100001100011001000.

In decimale bf8a18c8 =
$11x16^7+15x16^6+8x16^5+10x16^4+1x16^3+8x16^2+12x16+8=3213498568$.

Classi di universalita'

(Wolfram) –Per sintetizzare quanto trattato nei paragrafi precedenti, tutte le regole per gli automi cellulari rientrano in 4 classi di universalita', che determinano, per ogni configurazione data, tre classi di comportamento:

- **Classe 1** - il sistema si estingue nel giro di pochi intervalli di tempo
- **Classe 2** - il sistema si stabilizza
- **Classe 3** - il sistema entra nel caos
- **Classe 4** - il sistema si struttura in modo complesso, ne' statico ne' caotico.

All'interno delle regole che definiscono il sistema si stabilisce un *parametro* variabile che determina il passaggio da una classe all'altra. (Negli automi cellulari il parametro definisce la probabilità che una data cellula sia ancora viva al ciclo successivo. Va da 0 a 1 ed in prossimità di 0,273 il sistema assume comportamenti complessi (classe 4)).

Computazione:

- Nei sistemi dinamici le prime due classi corrispondono all' *ordine* (con attrattori che predeterminano lo stato finale del sistema) , la terza al *caos* (con gli attrattori strani) e la quarta alla *complessità*.
- Nello stato della materia le prime due classi corrispondono ai solidi, la terza ai fluidi (liquidi e gas) e la quarta alla transizione di fase fra i due stati.
- Nell'area della computazione le prime due classi corrispondono agli algoritmi in tempo polinomiale (che terminano), la quarta agli algoritmi in tempo non polinomiale (che non terminano) e la quarta agli algoritmi indecidibili, per i quali non si può dire in anticipo quale sarà il loro comportamento (teorema dell'indecidibilità - Turing).

Gli automi cellulari sono, in definitiva, algoritmi in grado di generare, su uno schermo, configurazioni anche molto complesse in base a regole ben definite.

La possibilità di analizzarne le dinamiche in modo accurato potrebbe consentire di formulare leggi universali sull'*emergenza* della *complessità*.

Complessità

Da cosa deriva l'ordine? Quali sono le leggi naturali che regolano i sistemi complessi?

Alla base dello studio della *complessità* c'è l'idea che esista una legge generale che governa la formazione di configurazioni ordinate all'interno di sistemi in equilibrio dinamico (vedi "*classi di universalità*" dove il termine "ordine" assume un altro significato, più vicino a stagnazione, mancanza di dinamica).

I sistemi complessi sono formati da agenti indipendenti che interagiscono, adattandosi ed evolvendo, e sviluppano una forma di autorganizzazione che consente al sistema di acquisire proprietà collettive che non sono proprie dei singoli agenti, quella che si chiama *emergenza*.

Gli stessi sistemi sono *adattativi* rispetto alla realtà esterna e si pongono nella regione conosciuta come *margine del caos*.

La definizione di *complessità* risulta ancora dibattuta. In certi casi viene utilizzato il termine *"interessante".*

Lo studio della *complessità* altresì avviene quasi esclusivamente mediante simulazioni al calcolatore.

Emergenza

Ad ogni livello di *complessità* emergono proprietà nuove che non hanno niente a che fare con le proprietà del livello precedente. Si producono delle transizioni di fase che creano nuovi sistemi, governati da leggi totalmente diverse da quelle che governano i sistemi gerarchicamente inferiori. Le leggi fondamentali delle particelle riguardano questo specifico livello e non sono estendibili ai livelli superiori. Le leggi della chimica, ad esempio, non sono estendibili alla biologia.

Nei sistemi emergenti si rileva come il tutto sia maggiore della somma delle sue parti.

C'e' chi ritiene che esista una forza che contrasta l'entropia e che consente l'emergenza di sistemi/comportamenti di livello superiore.

I sistemi diventano, a loro volta, agenti che competono e cooperano per formare sistemi di livello superiore. L'emergenza, in presenza di agenti adattativi intelligenti, nasce dalla coevoluzione.

Le entità emergenti mostrano i comportamenti più interessanti (capacità computazionali) quando si trovano al margine del caos, e l'adattamento le spinge a livelli di complessità crescenti.

I sistemi con maggiori capacità computazionali prevarranno sempre, all'interno di un ambiente competitivo, su sistemi troppo rigidi o troppo caotici; entrambi saranno spinti da apprendimento ed evoluzione verso il margine del caos.

Esempi di sistemi emergenti:

Gli atomi ricercano uno stato di energia minima formando legami chimici e producendo strutture emergenti come le molecole; gli esseri umani interagiscono creando il mercato, le culture, le religioni.

Automi cellulari bidimensionali: alcune applicazioni

<u>Esempio n°1:</u>

Usiamo uno spazio cellulare bidimensionale $\Gamma = Z^2$ (o una porzione finita di Z^2 , ma allora bisogna precisare le condizioni al bordo) per rappresentare una città.

Scegliamo i seguenti come stati possibili delle celle:

1. spazio libero
2. abitazione
3. industria
4. attività commerciale
5. ferrovia
6. strada
7. acqua
8. spazio verde pubblico

In questo caso S ={1,...,8}.

Possiamo in questo modo dare, con lo spazio cellulare, una rappresentazione "funzionale" di una città, cioè una rappresentazione grafica del tipo di utilizzo del territorio. A questo punto scegliamo, ad esempio, come vicini di una cella quelli dell'intorno di Moore di raggio 2 [Fig.12].
Possiamo considerare la seguente regola per l'evoluzione degli stati delle celle:

a. se lo stato della cella $\sigma_i(\tau+1) = \sigma_i(\tau)$
b. se $\sigma_i(\tau)$ = "spazio libero" allora
   - si trovano gli stati maggiormente presenti nell'intorno della cella
   - se vi è uno solo di tali stati s allora si ponga $\sigma_i(\tau+1) = s$
   - se diversi stati $s_1,..., s_k$ e si ponga $\sigma_i(\tau+1) = s_j$

In altre parole in questo semplice modello solo le celle nello stato "spazio libero" subiscono una reale evoluzione. Le regola di evoluzione cambia lo spazio libero nello stato che più frequentemente è presente nell'intorno della cella. Se vi sono differenti stati presenti in maggior numero rispetto agli altri, allora la regola di evoluzione è aleatoria. Questo è un esempio di "AC stocastico": le regole di transizione non fissano in modo deterministico lo stato futuro di una cella, ma si limitano a indicare la probabilità che lo stato di una cella si trasformi in un certo modo.

<u>Esempio n°2:</u>

Il modello di segregazione di Schelling nasce dalla considerazione che le carte demografiche di quasi tutte le aree metropolitane degli USA presentano facilmente zone con prevalenza di una etnia, cioè che risulta difficile trovare zone in cui non ci sia almeno il 75% di abitanti tutti appartenenti alla stessa etnia. É quindi un modello che mostra come si formino in modo autonomo delle zone di convivenza basate sul desiderio delle persone di vivere con "quelli del loro stesso tipo", con cui cioè mostrano una certa empatia. Si noti che tali zone di convivenza nascono quindi dalle dinamiche dei singoli individui e non a partire dalla volontà di un'autorità centrale.
In questo esempio Γ è finito, l'AC ha condizioni al bordo periodiche, intorni di tipo von Neumann o Moore e tre stati (le due "etnie" e lo stato "cella libera").
La dinamica avviene secondo la seguente regola:
1. fisso un modo per scegliere una coppia di celle con stati diversi (tale scelta può essere fatta in modo aleatorio o deterministico, il caratteristico comportamento finale rimane lo stesso).
2. Scelgo quindi una coppia di celle. Supponiamo che entrambe siano occupate.
3. Analizzo gli intorni di tali celle e valuto la "felicità" di ogni cella. La felicità di una cella è data dal numero di vicini nello stesso stato.
4. Confronto la felicità calcolata con quella di soglia (p.e. la cella è sufficientemente felice se più di un terzo dei suoi vicini è del suo stesso tipo)
5. Se entrambe le celle sono sotto la felicità di soglia (quindi vorrebbero cambiare) e se lo scambio delle celle porta a non diminuire la loro felicità, allora scambio gli stati delle celle, altrimenti le lascio come sono.
6. Se invece una sola delle due celle estratte è occupata, allora le scambio se ciò porta ad un aumento della felicità della cella occupata estratta.
7. Tutte le altre celle vengono lasciate come sono; al passo successivo scelgo un'altra (in generale) coppia di celle.

Descritto nel modo precedente in realtà il modello di Schelling prevede regole che dipendono da una funzione esterna (la scelta di coppie di celle). Se si generalizza la definizione di AC in tal senso ("AC esogeno"), allora si ottiene un automa quadridimensionale (una sua cella è in realtà una coppia di celle piane...).

Esempio n°3:

Il modello di Greenberg-Hastings è un semplice AC usato nella modellazione dei cosiddetti "mezzi eccitabili". Un esempio di mezzo eccitabile è il muscolo, che può essere in uno stato di riposo o in uno stato eccitato seguito poi da uno stato di recupero. Un altro esempio è dato da una foresta pensata in funzione della sua capacità di incendiarsi: la foresta può essere in uno stato di quiete (cioè potenzialmente incendiabile), oppure può essere in corso un incendio a cui seguirà uno stato di ricrescita della vegetazione. Anche alcune reazioni chimiche seguono questo semplice schema.
Possiamo costruire un AC che modellizza questo tipo di processi se consideriamo tre stati: "riposo", "eccitato", "in recupero". L'evoluzione avviene su un reticolo regolare bidimensionale, ed è caratterizzata dalle seguenti regole:

- Una cella in riposo rimane tale finché uno dei suoi vicini non diventa eccitato. In tal caso anch'essa diventa eccitata.
- Una cella eccitata passa sempre in stato di recupero al passo successivo.
- Una cella in stato di recupero passa sempre in stato di riposo al passo successivo.

Quindi la dinamica dal tempo t al tempo $(t+1)$ è la seguente:

- Riposo $\rightarrow$ Riposo se nessun vicino è "Eccitato"
- Riposo $\rightarrow$ Eccitato se almeno un vicino è "Eccitato"
- Eccitato $\rightarrow$ In recupero
- In recupero $\rightarrow$ Riposo

Per definire completamente l'automa manca la scelta del tipo di intorno che, a seconda dei casi, può essere un intorno di von Neumann o di Moore di raggio 1 o 2.

Un interessante problema che frequentemente si presenta studiando gli AC è quello del comportamento al limite (o asintotico), vale a dire per $t \rightarrow +\infty$.

Uno studio sperimentale condotto da S. Wolfram [RIF] sembra abbia trovato solo tre possibilità base:

i. Il sistema raggiunge uno stato globale "fisso" s_i dopo un tempo T (o si scompone in sottoinsiemi con questo comportamento)

$$\sigma_i(\tau) = s_j \qquad \forall t \geq T$$

ii. Il sistema ha un comportamento periodico di periodo P dopo un tempo T (o si scompone in sottoinsiemi con questo comportamento)

iii. Il sistema ha un comportamento differente dai precedenti due e non presenta nessuna configurazione particolare. In tal caso si dice che ha un comportamento al limite "caotico" (in questo caso si presentano spesso configurazioni "frattali").

È un problema aperto riuscire a classificare in modo rigoroso, e non solo sperimentale, il comportamento asintotico di un AC.

Occorre altresì dire che in realtà non è essenziale il fatto di avere celle su reticoli. L'importante è, infatti, stabilire una relazione di vicinanza. I reticoli sono usati solo perché con essi è più facile dire quali sono i vicini di una cella. Per esempio in geografia le celle in genere hanno confini non banali, legati a regole nazionali o provinciali o di tipo amministrativo. Ancora: in sociologia la vicinanza può voler dire "affinità", quindi non interessa neanche la rappresentazione in R^d.

VITA ARTIFICIALE

(Langton) Modelli che simulano i meccanismi biologici alla base dell'evoluzione per comprenderne il funzionamento. Gli agenti di un sistema di vita artificiale possiedono la capacità di interagire con l'ambiente e con altri agenti oltre che di autoriprodursi. Un comportamento complesso, simile alla vita, è il risultato di regole semplici che si manifestano dal basso verso l'alto, cioè su livelli di complessità crescenti. La vita è frutto dell'organizzazione della materia e può emergere in biologie basate su elementi diversi dal carbonio. All'interno di un universo di Von Neumann gli automi cellulari si comportano in base a tavole delle regole. Alcune tavole funzionano, creando strutture interessanti, altre no. Gli automi cellulari governati dalle regole di classe 4 hanno capacità computazionali, cioè sono in grado di memorizzare l'informazione, elaborarla e trasmetterla. I sistemi viventi o complessi non si limitano ad adeguarsi alle forze fisiche esterne ma interagiscono con esse elaborando informazioni. Vedi il programma Life come esempio di automi cellulari non autoriproducentesi
C'è anche chi si occupa di società artificiali.

La "macchina" Automa Cellulare, nella sua semplicità e nella sua non dipendenza da robusti assunti teorici sulla natura e comportamento dei sistemi, fatta eccezione per il fatto che gli effetti si propagano grazie alla adiacenza spaziale fra elementi del sistema, ha ottenuto negli anni più recenti un grande favore in molte discipline, ivi comprese quelle territoriali.

Life:un mondo brulicante di imprevedibili organismi viventi

Nel 1970 dalle pagine di *Scientific American* Martin Gardner fece conoscere al mondo intero un gioco – denominato *Life* – ideato dal matematico inglese John H. Conway allo scopo di simulare lo sviluppo e il decadimento di popolazioni composte da semplici organismi viventi. Nel gioco lo spazio è rappresentato da una griglia bidimensionale di caselle avente idealmente estensione infinita (rappresentabile come un toroide – fig.9) e ognuna delle quali può ospitare, o meno, un singolo organismo.

Per via dell'analogia con crescita, diminuzione e alterazione di una società di organismi in vita, Life appartiene alla categoria dei "giochi di simulazione", giochi che assomigliano da vicino a processi di vita reale.

L'idea base è partire con una semplice configurazione di celle (organismi), ed osservare come cambia applicando le "leggi genetiche" di Conway per la nascita, la morte e la sopravvivenza. Conway scelse attentamente queste regole dopo un lungo periodo di sperimentazione.

Le leggi genetiche di Conway sono sostanzialmente semplici.

Per prima cosa ogni cellula ha 8 cellule adiacenti: 4 ortogonalmente e 4 diagonalmente.

Le regole sono le seguenti:

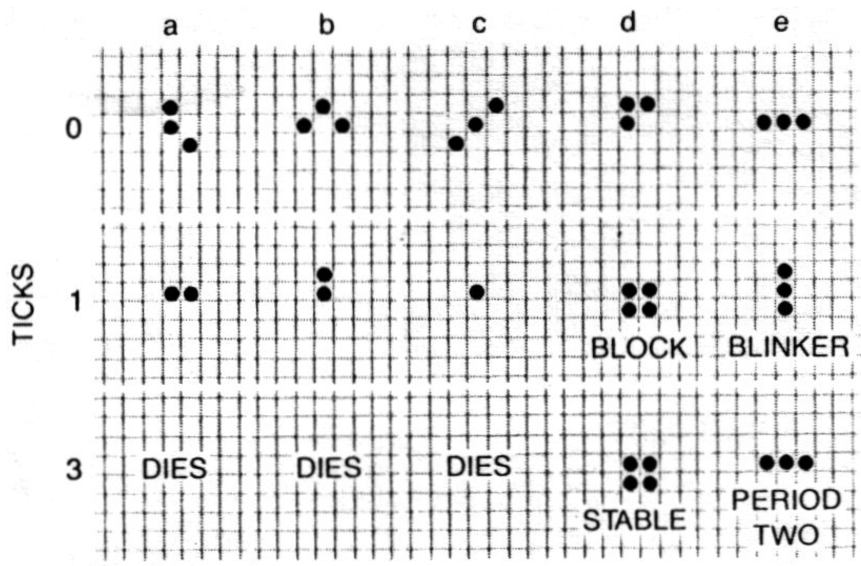
(1) **sopravvivenza –** un organismo sopravvive per la generazione seguente se nelle caselle adiacenti sono presenti 2 o 3 organismi;

(2) **morte –** un organismo muore liberando la casella che occupa se nelle caselle adiacenti si trovano più di 3 organismi (sovraffollamento) o meno di 2 organismi (isolamento);

(3) **nascita –** una casella vuota viene occupata da un nuovo organismo se nelle caselle adiacenti sono presenti esattamente 3 organismi.

Il gioco consiste nel prevedere ed osservare l'evoluzione nel tempo di una popolazione iniziale di organismi variamente distribuita nello spazio.

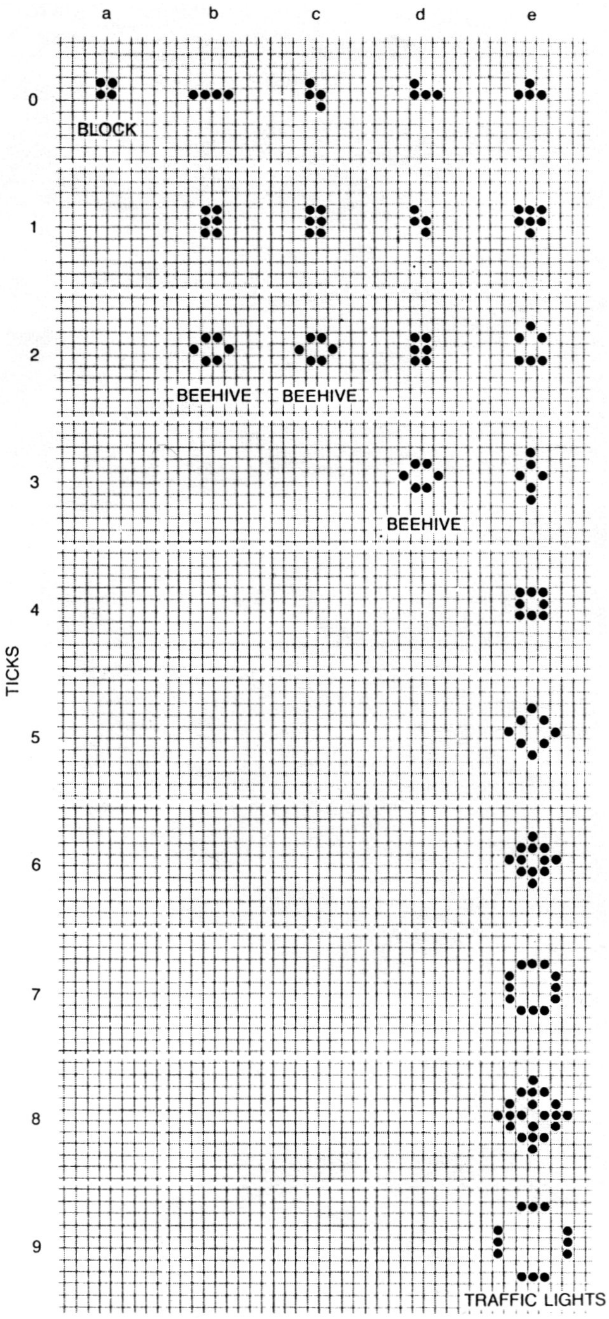
Esistono disposizioni che evolvono verso strutture spaziali stabili nel tempo – statiche o periodiche – e disposizioni instabili che si accrescono indefinitamente o che, dopo una fase transitoria più o meno duratura, si estinguono completamente. O ancora pattern senza una iniziale simmetria che tendono a divenire simmetrici e, una volta che la simmetria è raggiunta, non può essere persa, bensì piuttosto arricchita.



[**Figura 21:** L'evoluzione di cinque triplette in Life]

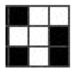
L'evoluzione nel tempo di queste figure minimali [Fig. 21] non è certo strabiliante ed è ancora facilmente prevedibile, ma da sole rappresentano comunque 3 dei 4 esiti plausibili:estinzione e stabilità statica o periodica dopo un transitorio iniziale. Certamente il fascino del gioco consiste nell'osservare la dinamica di disposizioni molto più complesse, eventualmente ottenute dalla contaminazione per prossimità spaziale di strutture prodotte da semplici configurazioni iniziali aventi orientamento diverso (si noti che le regole del gioco sono simmetriche rispetto agli orientamenti ortogonali e diagonali e che questa caratteristica di "isotropia" favorisce l'evoluzione di aggregazioni di organismi simmetriche e super-simmetriche). Sicuramente il futuro di una particolare disposizione di organismi è univocamente determinato dalle regole del gioco, ma è sempre possibile prevedere a priori l'esito di una arbitraria configurazione iniziale? In altre parole: è possibile, almeno in linea di principio, scrivere un programma che, data una specifica disposizione (pattern) di organismi, determini in un tempo quantificabile l'esito finale della loro evoluzione secondo le regole del gioco? La risposta è negativa: Life è veramente imprevedibile. Questa domanda e questa risposta hanno attinenza con le cosiddette "teorie del tutto".

La figura seguente [Fig. 22] mostra le "storie evolutive" di cinque tetromini.



[**Figura 22:** "Storie evolutive" di cinque tetromini in Life]

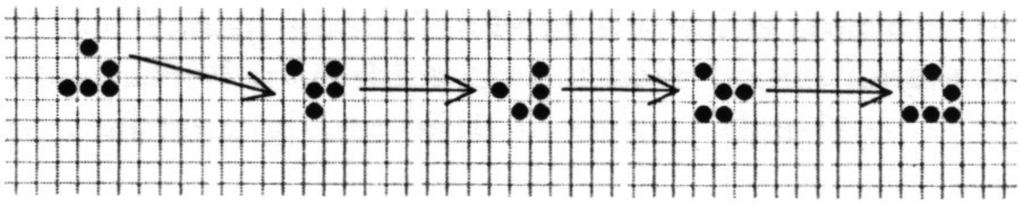
La figura *a)* è ferma, la *b)* e la *c)* raggiungono una struttura stabile chiamata “alveare” alla seconda generazione, mentre la *d*) alla terza generazione. Infine il tetromino *e*) assume una configurazione denominata “semaforo” alla nona generazione.



[**Figura 23:** Il pentomino R]

Questo pentomino [Fig.23] - chiamato “Pentomino-R” per la sua forma - è la prima struttura individuata da Conway che sembrava sfuggire ad ogni simulazione "a mano". In effetti raggiunge la stabilità dopo 1103 generazioni. Diversi programmi furono scritti appositamente per prevederne l'evoluzione, anche se al giorno d'oggi per un moderno personal computer è sufficiente un secondo.

Esiste un configurazione, e non è la sola, che non si estingue, non si accresce indefinitamente e non si stabilizza nè staticamente nè periodicamente: è quella rappresentata nella seguente figura [Fig.24].



[**Figura 24:** Il “glider”]

Si tratta di un pattern – denominato *glider* o aliante – periodico rispetto al tempo, ma non rispetto allo spazio: esso si muove infatti nella griglia del gioco con una velocità pari a un quarto della velocità massima teorica (la “velocità della luce” è pari a quella del Re nel gioco degli Scacchi). [La velocità è ottenuta dividendo il numero di generazioni richieste per replicare una figura per il numero di cellule che si sono mosse]. Dopo due generazioni quest’oggetto ruota e viene riflesso in linea diagonale. I geometri chiamano questo comportamento “riflessione dell’aliante”, da cui il nome dato alla figura.

Considerando uno spazio di gioco finito come il toro una popolazione che non si estingue non può che stabilizzarsi in una configurazione statica o periodica: il numero di configurazioni possibili è infatti grande, ma non infinito (per una griglia di mX n caselle le configurazioni possibili sono esattamente 2^{mn}) e, di conseguenza, non può esistere una popolazione che varia eternamente la propria disposizione: prima o poi (al massimo dopo 2^{mn} “quanti” di tempo) si disporrà secondo una configurazione già assunta in precedenza e, dato che le regole sono invarianti rispetto al tempo, a partire da quell’istante si stabilizzerà in un ciclo periodico (questo ragionamento è un esempio di ciò che si definisce “dimostrazione formale”: è sempre necessario ricorrervi per evitare di verificare direttamente un numero proibitivo o infinito di casi particolari). Passando ad un ipotetico spazio di gioco infinito si aprono nuove possibilità:

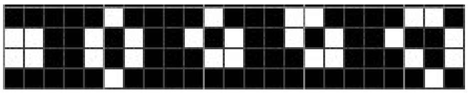
- strutture periodiche nel tempo rispetto allo spazio locale, ma non a quello globale (è il caso del movimento, di cui il glider costituisce un semplice esempio);

- popolazioni il cui numero di organismi cresce indefinitamente (con o senza una dinamica prevedibile);
- popolazioni che modificano continuamente la propria disposizione mantenendosi limitate e non conservando una struttura periodica locale (anche in questo caso la dinamica può essere o non essere prevedibile).

Ecco qui di seguito alcuni degli oggetti che emergono in Life:

Oggetti immobili

Alcuni degli oggetti più comuni in Life mantengono la propria conformazione generazione dopo generazione: nessuna cellula nasce, nessuna cellula muore. Per realizzare un oggetto del genere bisogna tenere in considerazione il fatto che ogni cellula deve avere 2 o 3 vicini e ogni cellula morta deve averne un qualunque numero eccetto 3. Ecco una selezione di oggetti stabili [Fig.25]:

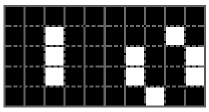


[**Figura 25:** Alcuni oggetti stabili in Life]

Da sinistra il blocco 2x2, la cella alveare, la barca, la nave e la pagnotta.
E' possibile cercare a mano delle forme di vita stabili, ma spesso per questo viene utilizzato il computer: ne è stata individuata una composta da 20 cellule.

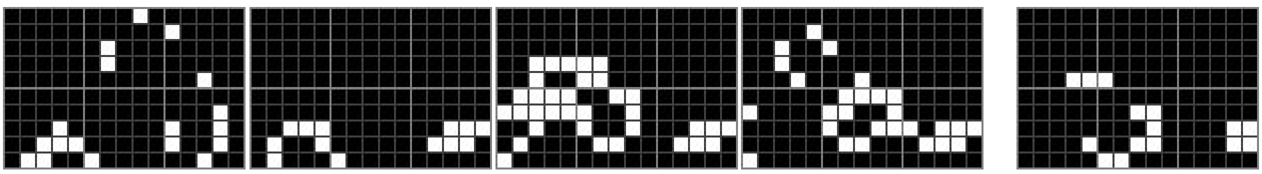
Oscillatori

Gli oscillatori sono oggetti che cambiano passo dopo passo, ripetendosi dopo un certo numero di generazioni. I più semplici sono gli oscillatori di periodo 2. Eccone due [Fig.26]: da sinistra il segmento e il rospo.



[**Figura 26:** Oscillatori in Life]

Durante l'evoluzione del Pentomino-R si può notare la creazione, dopo 737 generazioni, di un rospo, che però viene distrutto dopo soli 14 passi da un'esplosione nei suoi pressi. Eccone alcune istantanee [Fig.27]:

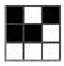


La creazione del rospo. | **Il rospo si trova in basso a destra.** | **L'esplosione da sinistra.** | **Il rospo viene colpito.** | **Del rospo non rimane che un blocco 2x2.**

[**Figura 27:** Storie evolutive di alcuni oggetti in Life]

Alianti

L'evoluzione del Pentomino-R mostra anche alcuni oggetti che si muovono. Si tratta dei più spettacolari oggetti scoperti in Life. Sono quelli che sopra abbiamo definito "alianti" e sono composti da solo cinque cellule [Fig.28]:



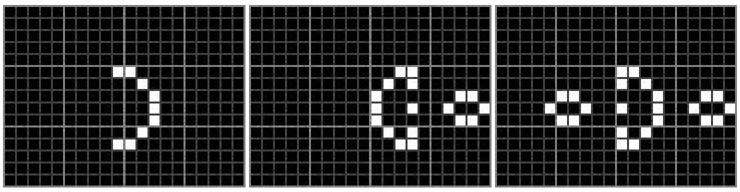
[**Figura 28:** L'aliante]

Dopo quattro generazioni, l'aliante riacquista la sua forma iniziale, ma spostato lungo una diagonale. Nel corso delle varie generazioni l'aliante si muove diagonalmente per la scacchiera. Gli oggetti del genere vengono chiamati *navicelle*.

E' importante notare come le regole non dicano nulla sul movimento; nonostante ciò, appaiono strutture mobili. E' la più semplice e convincente dimostrazione di complessità emergente.

Ape regina

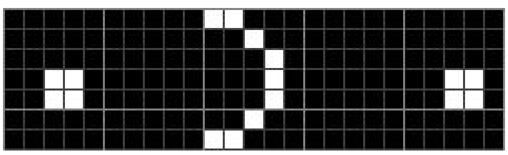
Un' importante struttura che nel Pentomino-R compare alla 774^a generazione è l'ape regina [Fig.29].



L'ape regina. **La prima cella dell'alveare.** **La seconda cella dell'alveare.**

[**Figura 29:** L'ape regina]

Un'ape regina si muove verso destra, crea una cella alveare stabile e si gira a sinistra. Qui crea un'altra cella alveare e si gira di nuovo a destra. Sfortunatamente nei turni successivi si scontra con il primo alveare creato distruggendolo. Se, però, si mettono dei blocchi 2x2 ai lati degli alveari creati dall'ape, questi si distruggono prima che l'ape possa scontrarsi con loro. Ecco la configurazione iniziale [Fig.30]:

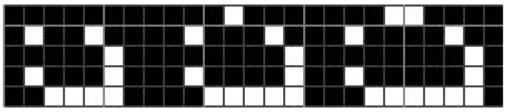


[**Figura 30**: Evoluzione dell'ape regina]

In questa struttura l'ape va avanti e indietro, mentre i blocchi rimangono. Ha un carattere oscillatorio di periodo 30, e per 15 passi va verso destra, per 15 verso sinistra.

Navicelle ortogonali

Le navicelle ortogonali [Fig.31] si muovono orizzontalmente, verticalmente, a destra e a sinistra. Meno comuni degli alianti, si presentano comunque in molte strutture:

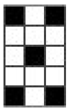


[**Figura 31**: Navicelle ortogonali]

Da sinistra una navicella leggera, una media, una pesante.

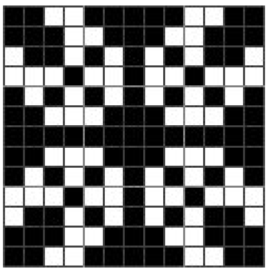
Strutture che evolvono in oscillatori

Un segmento di dieci cellule adiacenti sviluppa un'oscillazione di periodo 15. La struttura seguente [Fig.32], invece, diventa un oscillatore molto bello di periodo 3 chiamato pulsar [Fig.33]:



[**Figura 32**:Struttura iniziale]

Istantanea di un pulsar oscillante:

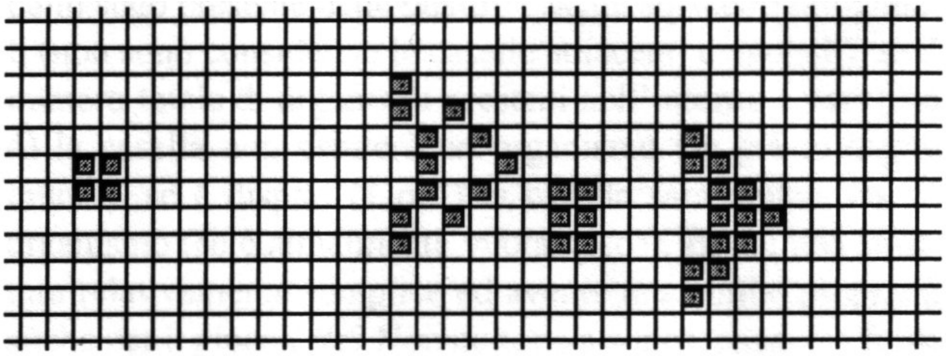


[**Figura 33:** Evoluzione della struttura: un pulsar oscillante]

Tutte le strutture prima o poi si stabilizzano?

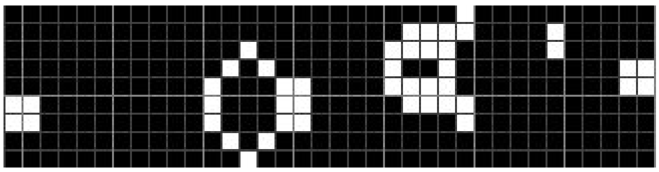
Una struttura si stabilizza quando diventa evidente che non ci sarà una crescita della popolazione. Ad esempio il Pentomino-R si stabilizza alla generazione 1103 perché a quel punto consiste soltanto più di oscillatori e alianti che si allontanano dagli oscillatori senza mai potersi scontrare nemmeno tra di loro.

Durante i primi studi fatti su Life sembrava che gli stati casuali tendessero prima o dopo a stabilizzarsi. Conway originariamente congetturò che non vi fossero pattern che potessero crescere senza limiti ed offrì un premio di $50 alla prima persona che potesse provare o confutare la congettura prima della fine del 1970. L'offerta venne pubblicizzata da Martin Gardner nella propria rubrica mensile su *Scientific American* e poco tempo dopo un piccolo gruppo di giovani ricercatori del gruppo di Intelligenza Artificiale del MIT di cui faceva parte Bill Gosper propose il *glider gun* (cannone di alianti) [Fig.34].



[**Figura 34:** Il cannone di alianti]

Il "cannone di alianti" genera un nuovo glider ogni 30 unità discrete di tempo (è questa la durata del suo ciclo di oscillazione): in uno spazio illimitato gli alianti si mantengono indefinitamente in movimento e quindi il numero complessivo di organismi si accresce continuamente. Questo oggetto è basato sostanzialmente sull'interazione di due api regine [Fig.35]. Quando queste api collidono, invece di produrre celle alveare producono un nuovo aliante. L'aliante si allontana e il processo si ripete dopo 30 passi.

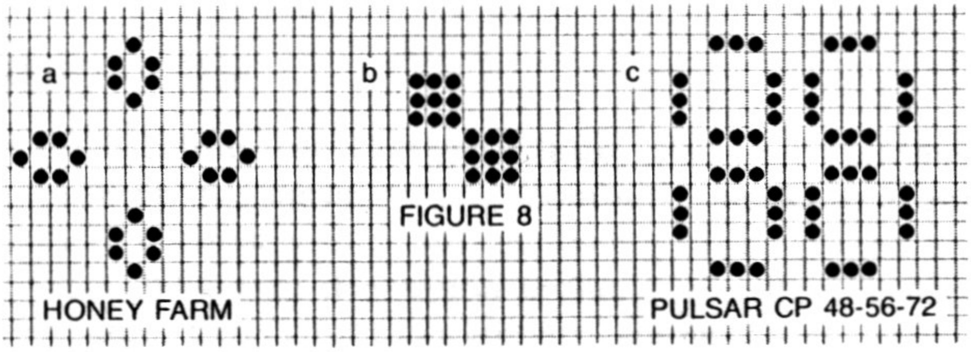


[**Figura 35**: Evoluzione del cannone di alianti]

Esiste anche una struttura periodica capace di "mangiare" gli alianti che la incontrano in determinati istanti del proprio ciclo avente una durata di 15 quanti di tempo e con una particolare direzione di incidenza.

Un altro schema che cresce all'infinito è il fumatore. A differenza del cannone di alianti, che rimane fermo producendo oggetti in movimento, il fumatore si muove producendo oggetti sia stazionari sia in movimento.
Nel corso degli anni sono stati scoperti o inventati molti cannoni e fumatori.

La figura 36 mostra tre belle scoperte effettuate da Conway e dai suoi collaboratori.



[**Figura 36:** Alcune strutture trovate da Conway e dai suoi collaboratori]

La figura *a)* è il risultato di 14 generazioni da una riga orizzontale di 7 celle. La figura *b)* è un oscillatore con periodo 8 trovato da Norton. La *c)* un oscillatore con un ciclo di vita di periodo 3.

La complessità di Life

Dentro l'universo di Life può essere costruito un computer. Non è possibile darne qui una descrizione completa, ma nella letteratura specializzata esistono diversi riferimenti ad esso. In breve si può dire che stormi di alianti e navicelle possono essere utilizzate per inviare informazioni come i segnali elettrici per i computer fisici. Questi flussi di alianti possono esser disposti in modo da interagire come si comporterebbero attraversando circuiti logici AND, OR, NOT che stanno alla base dei computer. Sarebbe certamente poco pratico costruire un computer in questo modo, ma con uno schema di Life abbastanza ampio e molto tempo a disposizione si può far girare su Life qualunque programma che giri su un computer ordinario. In Life sono già stati creati diversi computer molto specializzati, compreso uno che dà in output i numeri primi.

E' stata dimostrata la possibilità di creare un costruttore universale, una struttura in grado di ricevere in ingresso una certa struttura e di riprodurla. Nessuno ancora l'ha costruito, perché sarebbe gigantesco, ma è possibile in via teorica una sua realizzazione. Ovviamente nel momento in cui gli si dà in ingresso una struttura identica a sé, questi si autoriproduce. Possono anche essere costruiti costruttori che modificano le strutture in entrata, così come alcuni esseri viventi combinano e mutano i propri geni. Chi può sapere che cosa potrebbe svilupparsi in un universo abbastanza grande che "vive" con le regole di Life?

A che cosa può servire lo studio di Life

Lo studio di schemi in Life può portare a scoperte in aree della matematica e delle scienze più in generale. Il comportamento delle cellule o degli animali può essere semplificato se si cerca di ricondurlo a regole più semplici, come in Life. Un comportamento all'apparenza intelligente, come si nota in colonie di formiche, potrebbe in realtà essere lo sviluppo di poche e semplici regole che ancora non comprendiamo. Alcuni problemi del traffico potrebbero essere risolti se analizzati con dei metodi di simulazione matematica simili a quelli in atto per Life.

Le applicazioni nell'informatica sono molte: i virus dei computer sono degli automi cellulari, per cui il segreto per sconfiggerli potrebbe essere nascosto nelle regole di Life. Alcuni algoritmi per la gestione delle immagini utilizzano regole simili a quelle di Life per estrarre i contorni dalle figure.

Alcune malattie umane potrebbero essere sconfitte se si comprendesse meglio il meccanismo di nascita e morte delle cellule.
L'esplorazione delle galassie sarebbe più semplice se si potesse disporre di macchine in grado di autoriprodursi. In questo modo, mandando un robot del genere su Marte, questo costruirebbe una copia identica di sé e presto si popolerebbe tutto lo spazio di creature del genere, prive di alcuni di limiti umani. Sebbene teoricamente sia possibile, una realizzazione pratica non è però mai stata attuata.

Life è vivo?

Non sappiamo se delle creature viventi potrebbero sorgere in un universo sufficientemente ampio in cui vigono le regole di Life. Certo Life, sebbene semplice da descrivere, mostra molta della complessità del nostro universo. E' interessante chiedersi che cosa succederebbe in un universo di Life infinitamente largo disseminato con degli schemi casuali.

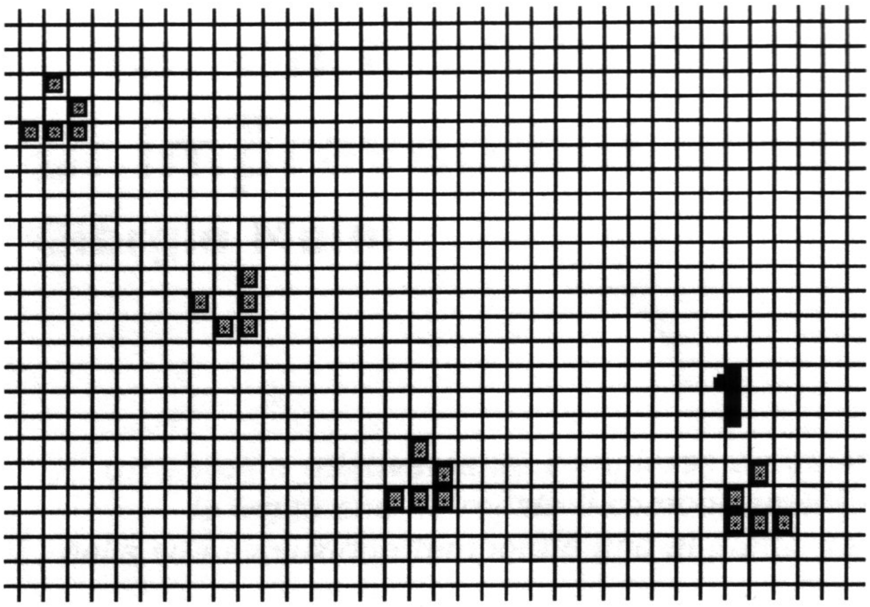
Si consideri, comunque, che Life ha soltanto due dimensioni, a differenza del nostro universo, e questa è una severa limitazione. Ci sono altre caratteristiche di Life - la tendenza verso oscillatori - che rendono l'universo di Life un posto non troppo ospitale per la vita. La domanda resta senza risposta, ma Life rimane una perfetta illustrazione ad un livello semplificato delle forze evolutive che hanno avuto corso nel nostro universo.

Per quanto la simulazione visuale al PC del gioco Life comunichi l'impressione di vitalità propria di una colonia di organismi, non sono poi molti i "comandamenti" della Artificial Life che risultano, almeno a prima vista, soddisfatti. In questo senso una importante domanda da porsi è la seguente: esistono strutture di organismi in gradi di auto-riprodursi generando nello spazio contiguo una seconda struttura avente identica morfologia (disposizione relativa dei singoli elementi della configurazione)? La risposta è: teoricamente sì, ma per motivare questa affermazione dobbiamo tornare indietro almeno fino ai primi anni '50.

Life è un esempio di una classe di sistemi computazionali astratti, gli automi cellulari, di cui si è trattato ampiamente nei paragrafi precedenti. Un automa cellulare è caratterizzato da un insieme di semplici elementi di computazione identici tra loro e con una geometria delle relazioni reciproche determinata a priori. Von Neumann aveva dimostrato in precedenza che una "macchina" astratta poteva replicare se stessa per mezzo di un "costruttore universale", un componente computazionalmente equivalente ad una macchina di Turing universale. [Tale macchina è un modello astratto di computazione in grado di eseguire qualsiasi algoritmo opportunamente codificato: rappresenta il concetto matematico di calcolabilità. Una macchina di Turing universale è formalmente equivalente ad un calcolatore convenzionale la cui struttura fondamentale è stata definita da Von Neumann negli anni '40 avente una memoria potenzialmente illimitata].

Poco prima di morire – i risultati della ricerca sono stati pubblicati in seguito da Arthur Burks – lo scienziato riuscì a dimostrare che un automa cellulare composto da circa 200.000 cellule, ognuna delle quali avente 29 stati distinti, conteneva un costruttore universale: bisogna altresì dire che fino ad oggi nessuno ha mai simulato con un PC tale automa di von Neumann. E' stato dimostrato che nel gioco Life esistono configurazioni computazionalmente equivalenti alla macchina di Turing; in linea di principio è quindi possibile simulare l'automa cellulare di von Neumann che auto-riproduce la propria struttura.

Come è possibile che un sistema semplice come il gioco Life sia equivalente al modello di calcolo universale rappresentato dalla macchina di Turing? Basti pensare al cannone di alianti, in cui il fascio ottenuto rappresenta un segnale di sincronismo analogo al clock di un calcolatore digitale: un fascio sincronizzato con questo segnale di clock può rappresentare una informazione binaria se la presenza di un aliante viene interpretata come "1" e l'assenza come "0".



[**Figura 37:** Una porta logica NOT ottenuta dalla collisione di due "fasce" di alianti]

Nella figura 37 il fascio a sinistra rappresenta il segnale di sincronismo, mentre il fascio a destra è la codifica dei bit 1-0-1; inoltre i due fasci sono reciprocamente orientati in modo da costituire una porta NOT. Il fascio che si ottiene come risultato della collisione delle due fasce di alianti è la codifica della sequenza 0-1-0. In modo analogo è possibile realizzare le porte logiche binarie necessarie alla costituzione di una rete combinatoria (per esempio è banale realizzare una porta XOR); più complessa risulta essere la realizzazione di elementi di memoria, ma si è dimostrato possibile ottenere anche la funzionalità di reti logiche sequenziali: tutti questi elementi sono infine sufficienti per l'implementazione di un vero calcolatore virtuale. L'estensione infinita della spazio del gioco permette di avere una memoria potenzialmente illimitata e di conseguenza è possibile simulare una macchina di Turing universale. Avere la stessa potenza computazionale del calcolatore universale ha però una conseguenza che può forse essere considerata spiacevole: non è possibile prevedere a priori l'evoluzione di una arbitraria configurazione iniziale. Un problema di questo tipo risulta infatti essere algoritmicamente indecidibile e l'unico modo di affrontarlo consiste nell'applicare le regole del gioco fino a raggiungere la situazione ricercata o una situazione incompatibile con essa, ma non si può garantire che questo modo di procedere abbia termine in un tempo finito (si noti che è un problema di finitezza e non semplicemente di durata ragionevole del tempo di computazione). [Un esempio classico di problema algoritmicamente indecidibile è il "problema della fermata" (per una macchina di Turing o per un sistema formalmente equivalente). Riferendosi al calcolatore convenzionale il problema consiste nello scrivere un programma che, analizzando il testo di un altro programma scelto in modo arbitrario, decida in un tempo finito se l'esecuzione del programma preso in esame ha termine oppure no. Si dimostra facilmente che non è possibile scrivere un programma con queste caratteristiche anche limitandosi ad un linguaggio di programmazione che ha come unici costrutti l'assegnamento tra variabili ed i comandi sequenziale, condizionale ed iterativo (si noti che questa è una limitazione teorica della calcolabilità: non si tratta semplicemente di un problema difficile che non è stato ancora risolto)].

Tutti i sistemi infiniti e aventi un grado di complessità non banale sono in questo senso computazionalmente irriducibili: l'unico modo di trattarli è "giocare" con le stesse regole. Per evitarlo è necessario limitare (forse drasticamente) l'arbitrarietà delle configurazioni che costituiscono i possibili inputs di un programma di previsione dell'evoluzione. Un programma che simuli l'evoluzione di un automa cellulare – indipendentemente dal fatto che sia visualizzata o meno la successione degli stati delle singole cellule – è fondamentalmente composto da un ciclo più esterno che implementa il fluire discreto del tempo e da un ciclo più interno che effettua la scansione di tutte le singole cellule dell'automa applicando a ciascuna la regola di transizione dello stato. Passando da un convenzionale calcolatore sequenziale ad una architettura "cellulare" parallela con una topologia affine a quella dell'automa da simulare (nel gioco Life, come in molti altri Automi Cellulari, la disposizione delle cellule che partecipano alla regola di transizione costituisce un intorno elementare del tipo di Moore) è possibile evitare il ciclo interno calcolando contemporaneamente per tutte le cellule lo stato successivo: la ripetizione spaziale sostituisce in questo modo una ripetizione temporale. L'elevato grado di parallelismo insito nella soluzione proposta (il tempo di calcolo dell'intera generazione successiva di organismi corrisponde al tempo impiegato per calcolare il nuovo stato della singola cellula) è conseguenza della limitata dipendenza temporale e della estremamente localizzata inter-dipendenza spaziale dei valori da elaborare.

Negli ultimi anni sono state anche proposte alcune versioni tridimensionali del gioco Life.

MODELLI PER LA DESCRIZIONE DEI FENOMENI URBANI E GEOGRAFICI

Le città, come gran parte dei fenomeni geografici, sono oggetti complessi. L'insieme intricato di attività urbane funziona con una sua propria logica, ma pur sempre una logica, dato che le città sono una delle creazioni di maggior successo della società umana.

Poichè quasi tutte le città esibiscono questa complessità, è ragionevole supporre che la complessità sia in qualche modo un requisito essenziale.

Le città esistono per supportare le funzioni economiche e sociali della società. Ma le società umane sono per loro stessa natura sistemi ricchi di informazioni. La città edificata deve perciò in qualche modo riflettere le strutture di informazione della società che la crea e la usa e, senza dubbio, la città è essa stessa un mezzo ricco di informazioni. Perciò il complesso dettaglio spaziale presente in una città può essere visto non come "rumore", ma come informazione.

I modelli che tentano di "spiegare" lo sviluppo delle città (o,più in generale, delle regioni geografiche) sono definiti *modelli urbani* o *modelli di localizzazione*. Questi modelli possono essere essenzialmente suddivisi in *statici* (o descrittivi) e *dinamici* (o esplicativi).

Il concetto fondamentale dei modelli statici è che una grande complessità equivalga semplicemente a "rumore", oscurando una struttura che è semplice nella sua essenza.

Questi modelli prospettano schemi localizzativi relativamente semplici: i centri del commercio al dettaglio, regolarmente distanziati, della Teoria delle località centrali, ad esempio, o l'uso del territorio a zone concentriche della Teoria di Alonso.

Il fatto che questi schemi siano difficili da riscontrare immediatamente nella realtà urbana, ma solo dopo più o meno approfondite analisi, è semplicemente valutato, nei modelli statici, come conferma della inevitabile presenza di informazioni di "disturbo", che nascondono le informazioni principali riguardo alla struttura dello schema localizzativo.

Gran parte dei modelli statici, inoltre, presuppongono attori razionali che interagiscono in un mercato che resta in una situazione di equilibrio stabile.

I fenomeni osservati nei modelli statici esistono sicuramente nelle città reali, ma mentre a livello degli individui coinvolti nel sistema la descrizione del loro comportamento economico può essere abbastanza ragionevole, a livello di aggregazione essi descrivono un equilibrio generale statico, in cui ogni individuo è in una forzata situazione ottimale. Questa non è una modellizzazione fondamentalmente ragionevole per una città, che, come suggeriscono buon senso ed esperienza, è raramente, se non mai, in uno stato di equilibrio. Quasi tutte le città sono sottoposte ad una continua crescita, mutamento, declino, e simultaneamente ad una ristrutturazione abituale.

L'approccio alla modellizzazione dinamica evita le più macroscopiche semplificazioni delle teorie statiche (o dell'equilibrio).

I modelli urbani infatti appartengono ad una famiglia di modelli estremamente delicati da usare ed interpretare, in quanto fanno riferimento a situazioni reali in cui è rilevante l'azione "libera" degli individui e quindi in cui assumono importanza specifica aspetti di scelta basati su comportamenti e attitudini spesso non riconducibili a determinazioni oggettive e che talvolta non sono neppure esprimibili come "medie" statistiche valutabili.

Nell'approccio dinamico la focalizzazione è sul processo che può, o non può, condurre ad un equilibrio stabile, ma in ogni caso questi modelli non dipendono dall'assunzione di un equilibrio.

Automi cellulari per la descrizione dei fenomeni urbani e geografici

I modelli dinamici (o esplicativi) di sviluppo urbano possono essere descritti con gli automi cellulari, che assumono in questo caso la specificazione di *automi cellulari urbani*.

Gli automi cellulari urbani costituiscono un tentativo di descrivere le dinamiche di sviluppo urbano in una forma più "naturale", attraverso una formulazione *locale* contrapposta alla tradizionale formulazione globale dei modelli statici (descrittivi).

Il comportamento complessivo di un sistema urbano deriva allora dalla integrazione di molti comportamenti locali dello stesso.

La formulazione globale (i processi di sviluppo urbano interpretati secondo leggi generali), può dunque essere sostituita dalla formulazione locale (i processi di sviluppo urbano possono essere interpretati sulla base di regole di uso dello spazio dipendenti dalle condizioni dalle condizioni degli "intorni" vicini).

I vantaggi dell'uso della formulazione locale sono essenzialmente: la semplicità delle regole di trasformazione; la possibilità di analizzare localizzazioni puntuali; la possibilità di utilizzare fattori casuali; la semplicità nella "taratura" del sistema relativamente al contesto.

Gli automi cellulari hanno, infatti, due caratteristiche intrinseche che li rendono vantaggiosi se applicati a problemi urbani e geografici. La prima è che essi sono, come è stato detto, intrinsecamente spaziali, e la seconda è che essi possono generare forme molto complesse per mezzo di regole semplicissime, offrendo così la possibilità di comprendere l'origine e il ruolo della complessità spaziale.

Un *automa cellulare urbano* (ACU) può quindi essere visto come una specificazione di un automa cellulare, con le seguenti caratteristiche:

- la *cella* è una zona urbana o geografica di una data estensione;
- la *matrice di celle* è un reticolo che identifica una superficie urbana o geografica (una città o un territorio);
- gli *stati delle celle* rappresentano gli usi del suolo (es. libero, residenza, industria, ecc.) o altre caratteristiche (es. il valore) del suolo stesso:
- l'*intorno* di una data cella è costituito dalle zone adiacenti alla zona considerata;
- le regole di transizione sono le regole che consentono la trasformazione dell'uso del suolo di una data regione in un altro uso (es. suolo libero che diventa residenza).

L'uso del suolo in una data zona ad un tempo (t+1) è quindi determinato dall'uso del suolo della zona stessa e delle zone vicine ad un tempo (t).

Tobler definisce questo particolare modello come *modello geografico*, afferente alla più generale classe di modelli di variazione d'uso del suolo, nella quale fa rientrare: il *modello indipendente* (la variazione d'uso del suolo è casuale); il *modello della dipendenza funzionale* (l'uso del suolo di una zona dipende dall'uso precedente del suolo nella stessa zona); il *modello storico* (l'uso del suolo di una zona dipende da diversi precedenti usi del suolo nella zona); il *modello multivariabile* (l'uso del suolo di una zona dipende da diverse caratteristiche- o variabili – relative a tale zona).

Tobler è forse stato il primo a riconoscere i vantaggi dei modelli cellulari. Molti altri studiosi hanno poi applicato gli automi cellulari a problematiche urbane e geografiche.

Phipps usò automi vincolati con perturbazioni stocastiche degli stati delle celle, per indagare certi principi di base della strutturazione spaziale.

Frankhauser mostrò che un modello cellulare di crescita di un tumore poteva anche essere interpretato per rappresentare la crescita di un'area urbana.

Hillier e Hansen svilupparono un approccio cellulare alla generazione della struttura spaziale che usarono con successo per modellizzare sia la forma costruita dei villaggi francesi che la disposizione delle stanze nelle case.

Batty, Fotheringham e altri hanno usato una tecnica strettamente collegata, aggregazione a diffusione limitata (Dla), per modellizzare la crescita delle aree edificate, basata, tra l'altro, sulla *geometria dei frattali*.

Coucleis ha individuato i limiti del modello geografico di Tobler nelle applicazioni reali, e ha proposto un formalismo più generale per un modello strutturale di automi cellulari urbani.

Il modello urbano di agglomerazione-congestione

Un modello dinamico di sviluppo urbano particolarmente interessante, realizzato con gli automi cellulari, è quello che assimila la città ad un organismo vivente, capace di auto regolarsi; la città, cioè, in questo modello, può crescere fino a raggiungere situazioni di congestione, e reagire quindi al sovraffollamento evolvendo verso configurazioni nuove.

Si tratta di un modello molto simile a quello di cooperazione-solitudine descritto dal gioco Life, descritto in precedenza.

Nell'ambito dell'analisi delle cause economiche che sono all'origine dei processi di concentrazione spaziale di popolazione, residenze e attività economiche (della città in sostanza), uno dei concetti maggiormente utilizzati dagli studiosi è quello di *economie di agglomerazione*, intendendo con esse quel vantaggio economico che deriva dalla localizzazione spazialmente prossima di attività economiche dello stesso tipo o complementari e per altri versi di residenze e popolazione; altro concetto largamente utilizzato è quello di *congestione*, intendendo con esso quella circostanza in cui le economie di agglomerazione sono annullate dall'incremento dei costi dovuto al sovraffollamento di una città, alla scarsa fluidità dei traffici, allorchè si sia raggiunta una certa soglia dimensionale.

I sistemi di regole che guidano l'evoluzione degli automi cellulari si basano spesso sul controllo locale dello stato del "vicinato" di ogni elemento; attraverso questo controllo si simulano situazioni in cui la prossimità di altri elementi della stessa specie (*cooperazione*) favorisce la "nascita" di *individui*, viceversa l'assenza, la *solitudine*, favorisce le "morti", ma anche situazioni in cui l'eccesso di individui della stessa specie, *sovrappopolazione*, è causa di "morti" o di "non nascite".

Una interpretazione geografica del gioco Life di H. Coucleis

Le regole di Life si possono sintetizzare nelle tre seguenti:

REGOLA 1 – *Sopravvivenze*. Ogni cella viva con due o tre celle vive nell'intorno sopravvive al ciclo successivo.

REGOLA 2 – *Morti*. Ogni cella viva con quattro o più celle vive nell'intorno, o meno di due, muore.

REGOLA 3 – *Nascite*. Ogni cella morta (non viva) con tre celle vive nell'intorno diventa viva nella generazione (ciclo) successivo.

L'interpretazione geografica è la seguente: una cella viva può essere, ad esempio, una zona urbana la cui popolazione supera una soglia stabilita, la dimensione di popolazione che necessita di una scuola.

In questo caso la REGOLA 1 stabilisce che una zona può assicurarsi la sua scuola se pure due o tre delle zone dell'intorno eccedono la soglia: questo corrisponde ad un'area urbana salubremente popolata, non affollata.

La REGOLA 2 stabilisce che una zona può perdere la sua scuola se quattro o più delle zone intorno superano la soglia stabilita: presumibilmente la popolazione della zona può sentirsi soffocata per il fatto di essere circondata da alte densità e può volerla abbandonare; la zona urbana può anche perdere la sua scuola se la popolazione diminuisce drasticamente nell'intero intorno, suggerendo l'abbandono dell'area.

La REGOLA 3 infine stabilisce che tre zone mediamente popolate dell'intorno rappresentano la condizione ottimale, tra gli estremi di sovraffollamento e isolamento, per una data zona, per raggiungere la popolazione necessaria ad acquisire un scuola.

Con ripetute applicazioni di queste regole, iniziando da configurazioni "realistiche", si può simulare come la densità di popolazione cambi nel tempo, e come scuole vengano perse od acquistate nell'area urbana.

Esempi di automi cellulari urbani

Proviamo a riflettere sui fattori da cui può dipendere lo sviluppo di una città; essi possono essere:

- **Fattori sociali:** presenza di famiglie o di industrie ed uffici, popolazione in aumento o in diminuzione.
- **Qualità del terreno:** pendenza, restrizioni legali alla costruzione, qualità in rapporto alla costruzione di grossi edifici, zone a elevato rischio sismico.
- **Fattori climatici:** per quanto riguarda, per esempio, il tipo di costruzioni.
- **Fattori economici**: prezzo degli affitti, prezzo del terreno o fattori economici che indichino il grado di espansione industriale della città.

- **Fattori locali:** se intorno ad un terreno libero abbiamo una grossa presenza di industrie, molto probabilmente in tale terreno sarà costruita un’altra industria e non, per esempio, una zona di verde pubblico. Se vicino al terreno libero abbiamo una ferrovia, avremo allora una bassa probabilità che in tale terreno verranno costruite delle abitazioni.

Come abbiamo visto l'automa è individuato dagli stati che le celle possono assumere, dall'intorno e dalle regole che legano l'intorno al mutamento di stato delle celle.

Gli automi nascono come un modo per mostrare gli effetti globali che si possono ottenere con la applicazione di una serie di regole piuttosto che come strumenti di analisi di una dinamica esistente. Per questo motivo tutto quello che è relativo alla stima dei parametri in essi compresi è la carenza maggiore e sulla quale si sta attualmente lavorando.

I modelli di automa cellulare nella loro forma più semplice hanno delle celle con due stati (edificato, non edificato), come abbiamo visto a proposito del metodi probabilistico di assegnazione. Queste celle cambiano di stato in funzione del proprio stato e di ciò che sta nell'intorno

La potenzialità viene calcolata con una funzione del valore degli stati delle celle nell'intorno. La transizione allo stato non edificato a edificato avviene quando il valore della potenzialità supera una soglia prestabilita.

$$P_j(t) > \theta \rightarrow S_j(t) = 1$$

Un esempio di questo tipo di calcolo è mostrato di seguito L'intorno è definito come la cella più le quattro adiacenti. Ogni cella ha due stati: edificato-non edificato. Inoltre ogni cella può avere essere attraversata da una strada Il potenziale è dato, come nel caso precedente dalla equazione

$$P_j(t) = \sum_{i \in \omega} S_i(t) + \alpha R_i(t)$$

dove:

- P_j è il potenziale;
- $S_i(t)$ è lo stato della cella (1=edificato, 0=non edificato);
- $R_i(t)$ è la qualità in rapporto alle strade (1=attraversata dalla strada, 0=non attraversata dalla strada.

La regola che stabilisce il passaggio allo stato edificato è la seguente:

$$P_j(t) > \theta \rightarrow S_j(t+1) = 1$$

dove $\theta = 6$ è una soglia che permette il passaggio allo stato edificato.

Esempio:

```
strade         intorno
0 0 1 1 1
0 1 1 0 0         H
1 0 1 0 0       H H H
1 0 0 1 0         H
1 0 0 0 1

tempo 0

edificato   edif+2*str    vicinato
0 0 0 0 0   0 0 2 2 2   0  5  6  6  4
0 1 0 0 0   0 3 2 0 0   5  5  9  4  2
0 0 0 0 0   2 0 2 0 0   4  7  4  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  2  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2

tempo 1

edificato   edif+2*str    vicinato
0 0 0 0 0   0 0 2 2 2   0  5  7  6  4
0 1 1 0 0   0 3 3 0 0   5  7 10  5  2
0 1 0 0 0   2 1 2 0 0   5  8  6  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  3  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2

tempo 2

edificato   edif+2*str    vicinato
0 0 1 0 0   0 0 3 2 2   0  6  8  7  4
0 1 1 0 0   0 3 3 0 0   5  7 11  5  2
0 1 0 0 0   2 1 2 0 0   5  8  6  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  3  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2

tempo 3

edificato   edif+2*str    vicinato
0 0 1 1 0   0 0 3 3 2   0  6  9  8  5
0 1 1 0 0   0 3 3 0 0   5  7 11  6  2
0 1 0 0 0   2 1 2 0 0   5  8  6  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  3  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2

tempo 4

edificato   edif+2*str    vicinato
0 0 1 1 0   0 0 3 3 2   0  6  9  8  5
0 1 1 0 0   0 3 3 0 0   5  7 11  6  2
0 1 0 0 0   2 1 2 0 0   5  8  6  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  3  4  2  4
```

```
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2

tempo 5

edificato   edif+2*str    vicinato
0 0 1 1 0   0 0 3 3 2   0  6  9  8  5
0 1 1 0 0   0 3 3 0 0   5  7 11  6  2
0 1 0 0 0   2 1 2 0 0   5  8  6  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  3  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2

tempo 6

edificato
0 0 1 1 0    tempo      0 1 2 3 4 5 6
0 1 1 0 0    tot celle  1 3 4 5 5 5 5
0 1 0 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
```

Come si vede nella tabella che riassume i risultati finali la quantità delle celle edificate è determinata dalla dinamica interna. Come sappiamo la dinamica urbana, soprattutto in relazione alle quantità globali è fortemente influenzata da fattori esterni. In questi casi la quantità globale è stabilita mentre la distribuzione nello spazio avviene per regole locali. Il modo di distribuire questa quantità globale tenendo conto delle regole locali, come abbiamo visto, può avvenire in vari modi. In questo caso se ne considerano due.

- variazione della soglia;
- distribuzione secondo il massimo.

Consideriamo la variazione della soglia. è evidente che più alta è la soglia, minore sarà il numero di celle generate. Viceversa, più bassa la soglia maggiore il numero di celle generate. Quindi soglia e numero delle celle edificate prodotte in ciascun periodo sono inversamente proporzionali. Se si riesce a stabilire questa relazione sarà poi possibile modulare la soglia in funzione della variazione stabilita.

Con questo metodo non è possibile giungere ad una assegnazione esattamente uguale al numero desiderato. Il metodo che garantisce questo risultato è quello del massimo, cui si è accennato precedentemente. In pratica, stabilito il numero delle celle da assegnare queste vengono assegnate a partire dalle celle che hanno la massima potenzialità. Vediamo lo stesso esempio di prima ma con una assegnazione che utilizza il potenziale massimo. La quantità di celle edificate per periodo è uguale a uno.

```
strade         intorno
0 0 1 1 1
0 1 1 0 0         H
1 0 1 0 0       H H H
1 0 0 1 0         H
1 0 0 0 1

tempo 0

edificato   edif+2*str    vicinato
---------   ----------  -------------
0 0 0 0 0   0 0 2 2 2   0  5  6  6  4
0 1 0 0 0   0 3 2 0 0   5  5  9  4  2
0 0 0 0 0   2 0 2 0 0   4  7  4  4  0
```

```
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  2  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2
---------   ----------  -------------

tempo 1

edificato   edif+2*str    vicinato
---------   ----------  -------------
0 0 0 0 0   0 0 2 2 2   0  5  7  6  4
0 1 1 0 0   0 3 3 0 0   5  6 10  5  2
0 0 0 0 0   2 0 2 0 0   4  7  5  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  2  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2
---------   ----------  -------------

tempo 2

edificato   edif+2*str    vicinato
---------   ----------  -------------
0 0 0 0 0   0 0 2 2 2   0  5  7  6  4
0 1 1 0 0   0 3 3 0 0   5  7 10  5  2
0 1 0 0 0   2 1 2 0 0   5  8  6  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  3  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2
---------   ----------  -------------

tempo 3

edificato   edif+2*str    vicinato
---------   ----------  -------------
0 0 1 0 0   0 0 3 2 2   0  6  8  7  4
0 1 1 0 0   0 3 3 0 0   5  7 11  5  2
0 1 0 0 0   2 1 2 0 0   5  8  6  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  3  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2
---------   ----------  -------------

tempo 4

edificato   edif+2*str    vicinato
---------   ----------  -------------
0 0 1 1 0   0 0 3 3 2   0  6  9  8  5
0 1 1 0 0   0 3 3 0 0   5  7 11  6  2
0 1 0 0 0   2 1 2 0 0   5  8  6  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  3  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2
---------   ----------  -------------

tempo 5

edificato   edif+2*str    vicinato
---------   ----------  -------------
0 1 1 1 0   0 1 3 3 2   1  7 10  8  5
0 1 1 0 0   0 3 3 0 0   5  8 11  6  2
0 1 0 0 0   2 1 2 0 0   5  8  6  4  0
0 0 0 0 0   2 0 0 2 0   6  3  4  2  4
0 0 0 0 0   2 0 0 0 2   4  2  0  4  2
---------   ----------  -------------

tempo 6

edificato
---------
```

```
0 1 1 1 0
0 1 1 0 0
0 1 1 0 0
0 0 0 0 0
0 0 0 0 0
---------
```

In generale, utilizzando il massimo si ottiene una forma più compatta perché tutti cercano il massimo disponibile in un dato periodo. Allo scopo di rappresentare meglio la realtà si introduce un termine che è relativo sia alla difficoltà di percezione sia alla possibilità di trovare un comportamento deviante.

$$P_j(t+1) = \sum_{i=\omega} a_i S_i(t) + \varepsilon_j$$

Ora, rispetto a questo modello di base, si possono introdurre delle articolazioni. Queste riguardano:

- espansione degli intorni e introduzione della funzione della distanza;
- utilizzazione di curve per pesare la distanza;
- più stati per cella.

Come si vede queste estensioni della regola dell'automa rendono il suo comportamento simile a quello delle zone o dei centri urbani così come vengono teorizzati nel modello Lowry e nei suoi derivati. Il modello urbano proposto da White e Engelen introduce appunto tutte le estensioni prima citate.

In questo modello ci sono tre usi del suolo che corrispondono alle categorie del modello della base economica:

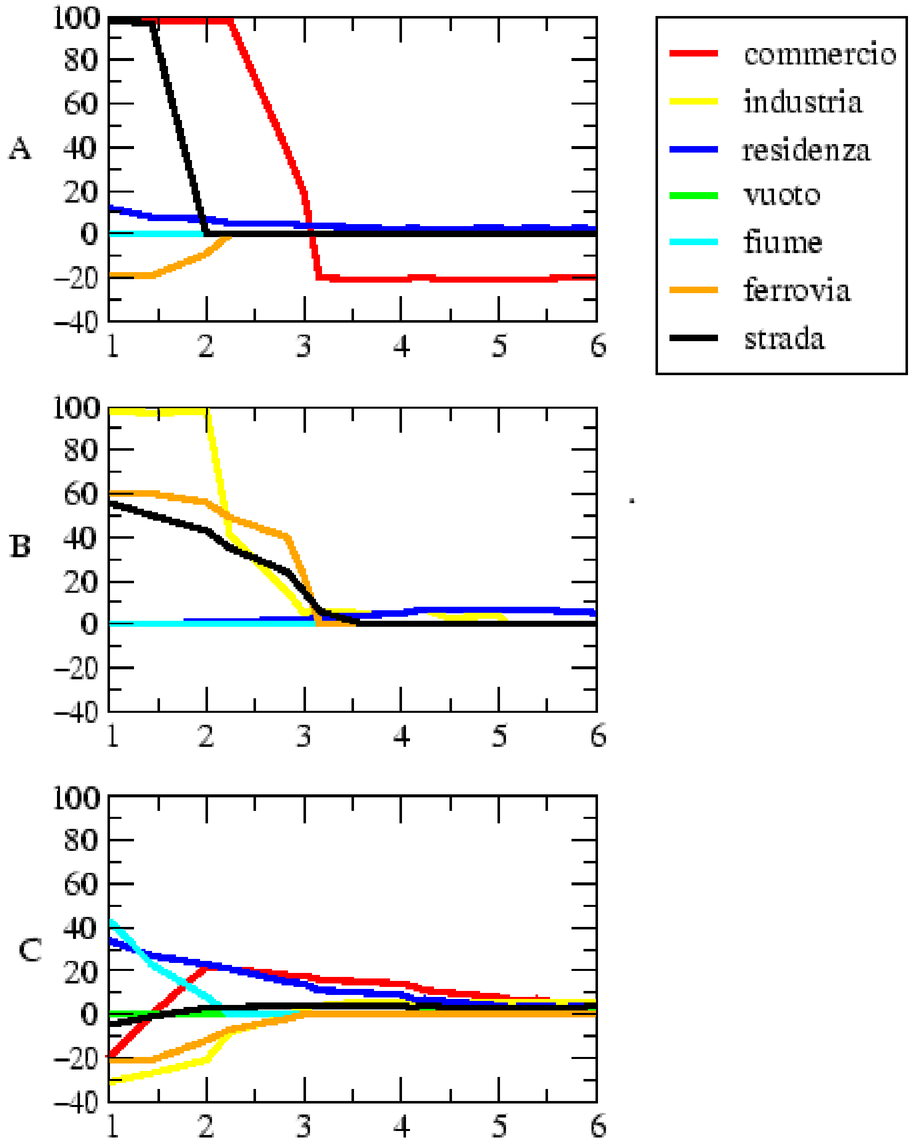
- popolazione residente
- industrie
- commercio

Poi esistono delle qualità del terreno. Queste qualità sono fisse e sono:

- strada
- ferrovia
- fiume

La potenzialità di mutare uso da parte di una cella dipende dalla vicinanza alle altre celle e dalla vicinanza alle qualità del terreno. Esiste per ogni cella un intorno che è dato da un cerchio avente raggio pari a sei celle. In questo modo ogni uso del suolo è influenzato da come sono disposti nel suo intorni gli usi del suolo e le qualità del terreno.

Il motore del modello in questo caso è rappresentato da una serie di curve [Fig.38] che pesano gli effetti degli usi del suolo sulla cella centrale e che stabiliscono la potenzialità che un certo uso del suolo sia in questa cella.



[**Figura 38:** La variazione dei pesi $m_{q,r,d}$.
Grafico A: in ascissa la distanza (d), in ordinata il peso delle celle in stato r (gli stati sono elencati in legenda con il relativo colore) in relazione alla attività commerciale ($q = 1$).
Grafico B: ordinata, peso delle celle in relazione alla attività industriale ($q = 2$).
Grafico C: ordinata, peso delle celle in relazione all'uso residenziale ($q = 3$).]

Esempio di parametri per il motore del modello.

Come si può notare questi parametri cercano di sintetizzare varie cose:

- gli effetti quantitativi di ciascuna variabile sull'altra, si può difatti notare come alcune curve siano più schiacciate di altre;

- la attrazione che varia con la distanza;
- la repulsione che è determinata sia da un non gradimento della attività troppo vicina, come ad esempio le residenze nei confronti della industria;
- la repulsione che è determinata dalla rendita come nel caso delle residenze che si allontanano dai servizi.

Commercio	distanza					
	1	2	3	4	5	6
commer.	98	98	19	-21	-21	-20
indust.	0	0	0	0	0	0
residenza	12	7	4	2	3	2
inedif.	0	0	0	0	0	0
fiume	0	0	0	0	0	0
ferrovia	-19	-9	0	0	0	0
strada	98	0	0	0	0	0

Industria	distanza					
	1	2	3	4	5	6
commer.	0	0	0	0	0	0
indust.	98	98	5	5	4	0
residenza	0	1	2	5	7	5
inedif.	0	0	0	0	0	0
fiume	0	0	0	0	0	0
ferrovia	60	56	22	0	0	0
strada	56	43	15	0	0	0

Residenza	distanza					
	1	2	3	4	5	6
commer.	-20	22	18	14	8	5
industr.	-31	-21	3	6	6	6
residenza	34	23	14	9	4	3
inedif.	0	0	0	0	1	2
fiume	43	8	0	0	0	0
ferrovia	-21	-12	0	0	0	0
strada	-5	3	4	4	3	4

Il passaggio dallo stato attuale a quello potenziale è rallentato da una sorta di inerzia che trattiene la cella nello stato primitivo. Inoltre un rumore permette comportamenti devianti.

Ad ogni cella è associata una potenzialità di passare da uno stato p ad uno stato q, con $1 \leq p \leq 4$ e $1 \leq q \leq 3$, che viene calcolata come nella equazione successiva, gli usi vengono assegnati partendo dalla potenzialità massima sino a che la quantità globale stabilita esogenamente viene raggiunta. Difatti la potenzialità di passare dallo stato p allo stato q nella cella c_{ijk} è calcolata con la seguente equazione:

$$P_{p,q} = v s_{ijk}(1 + \sum_{r,d} m_{q,r,d} I_d) + H_p$$

dove:

$P_{p,q}$ è il potenziale di transizione dallo stato p allo stato q nella cella c_{ijk};

$m_{q,r,d}$ è il peso associato alle celle in stato r distanti d da c_{ijk} in relazione allo stato q;

$I_d = 1$ se lo stato della cella distante d da c_{ijk} è uguale a r, $I_d = 0$ altrimenti;

H_q parametro di inerzia: $H_q > 0$ se $q = p$, altrimenti $H_q = 0$;

s_{ijk} è difficoltà a edificare in rapporto alla pendenza del terreno, $0 < s_{ijk} < 1$;

v è il rumore: $v = 1 + [-ln(rand)]^{\alpha}$.

I passi per l'assegnazione dell'uso del suolo sono i seguenti

1. si cerca la cella col potenziale massimo;
2. si verifica che si possa assegnare almeno una cella con l'uso del suolo per il quale il potenziale è massimo;
3. si assegna la cella;
4. si diminuisce di uno il numero di celle assegnabili per l'uso;
5. si pongono a zero tutti i potenziali per la cella in questione;
6. test: si verifica se tutte le celle da assegnare sono state assegnate, in caso affermativo si esce, altrimenti si ritorna al passo 1.

Automi in tre dimensioni

Come abbiamo accennato all'inizio la possibilità di considerare la terza dimensione introduce, oltre alla mescolanza di attività nella stessa cella, la variazione di densità che, come abbiamo visto a proposito della organizzazione delle attività nello spazio è una caratteristica intrinseca della città.

La terza dimensione nella città è data sostanzialmente dagli edifici multipiano i quali, come si può dedurre dalla parola moltiplicano la superficie disponibile. La crescita urbana avviene quindi orizzontalmente ma anche verticalmente.

Il fatto di crescere in verticale non è un fatto desiderato dalle attività, ma viene stimolato dalla domanda e quindi dall'aumento della rendita che fa si che si superino sia le resistenze dovute al costo di costruzione che, dopo una iniziale decrescita inizia a crescere per ogni piano aggiunto, e al costo di abitare o lavorare a piani superiori a quello terreno.

In sostanza quindi la domanda e la rendita tendono a spingere la città verso l'alto i due costi citati prima tendono a ridurne l'altezza. Ciò che risulta dipende dall'equilibrio di queste due forze.

L' equazione che stabilisce la potenzialità è quindi la seguente, che è simile alla precedente con l' introduzione dei costi relativi all' altezza:

$$P_{p,q} = vs_{ijk}(1 + \sum_{r,d} m_{q,r,d} I_d) + H_p - C_k - F_{q,k}$$

dove:

C_k costo di costruzione al piano k nel caso in cui $p = 4$;

$F_{k,q}$ costo associato allo svolgere l'attività q al piano k;

piano	costo costr	costo di attivit\`a comm	ind	resid
1	10	0	0	0
2	9	2	10	5
3	8	2	10	5
4	10	2	10	5
5	14	2	10	5
6	19	2	10	5
7	26	2	10	5
8	35	2	10	5
9	45	2	10	5
10	60	2	10	5

Bibliografia

Giorgio Meini, *Automi cellulari*, © 1995, Gruppo Editoriale Infomedia

S. Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific, Singapore 1986

Giorgio Meini, *Automi cellulari lineari: impensabili universi in una sola dimensione*, Computer Programming n.41, Novembre 1995, pp.43-48

S. Wolfram, *Software nella scienza e nella matematica*, Le Scienze, Novembre 1985

V. Sala, *Divertirsi con il calcolatore: giochi simulazione e grafica*, Le Scienze, 1987

B. Codenotti, L. Margara, *Caos, complessità computazionale e parallelismo* in: M. Capovani, B. Codenotti, *Matematica Computazionale*, Le Scienze Quaderni, n.84, Giugno 1995

Giorgio Meini, *Life: un mondo brulicante di imprevedibili organismi viventi*, Computer Programming n.40, Ottobre 1995, pp.46-52

Martin Gardner, *Wheels, Life and other Mathematical Amusements*, W. H. Freeman and Company, New York, cap.20, 21, 22

Silvana Lombardo, Silvia Santini, *Obiettivi e strumentazione della ricerca sugli automi cellulari. Indicazioni emergenti per l'analisi dei sistemi urbani*, Università di Pisa, Dipartimento di Ing. Civile

Silvia Sichirollo, *L'uso degli Automi Cellulari nello studio delle trasformazioni dei valori del mercato immobiliare. La città di Mestre*, DAEST, tesi di Laurea "Agostino Nardocci", Venezia, giugno 1997

Siti consultati:

www.geocities.com/Athens/8418

www.alpha 01.dm.unito.it

www.marianotomatis.it