Noncommutative Iwasawa theory for Selmer groups of abelian varieties over global function fields

S.S.D. MAT/02 – ALGEBRA

Siano F un campo di funzioni globale di caratteristica $p>0$, A/F una varietà abeliana e K/F un'estensione di campi tale che $G=\mathrm{Gal}(K/F)$ sia un gruppo di Lie ℓ-adico. Il lavoro di tesi è concentrato sull'aspetto algebrico della Teoria di Iwasawa non commutativa. In particolare, vengono generalizzati alcuni risultati sulla struttura dei duali di Pontrjagin dei gruppi di Selmer, visti come moduli sull'algebra di Iwasawa $\Lambda(G)$.

Nel primo capitolo vengono introdotte le nozioni di base di cui si avrà bisogno nel prosieguo del lavoro. Si comincia con i campi di funzioni e i gruppi di Lie ℓ-adici. Dopo aver richiamato la definizione di algebra di Iwasawa e le sue proprietà più importanti, viene data la definizione del principale oggetto di indagine di questo lavoro: il gruppo di Selmer. Infine, si riassume il lavoro di Venjakob sull'appropriata definizione di *elemento caratteristico* e *modulo pseudo-nullo* per moduli definiti su un algebra di Iwasawa non commutativa.

Nel secondo capitolo comincia lo studio di $Sel_A(K)_\ell^\vee$, cioè il duale di Pontrjagin del gruppo di Selmer, attraverso alcune generalizzazioni del Teorema del Controllo di Mazur.
Per il caso $\ell \neq p$ si dimostra il seguente:

Teorema
Sia K/F estensione non ramificata fuori da un insieme finito S di primi di F. Per ogni estensione finita F'/F contenuta in K, i nuclei e i conuclei delle mappe

$$a_{K/F'} : Sel_A(F')_\ell \longrightarrow Sel_A(K)_\ell^{\mathrm{Gal}(K/F')}$$

sono $\mathbb{Z}_\ell$-moduli cofinitamente generati. Se tutti i primi di S e quelli di cattiva riduzione hanno gruppi di decomposizione aperti in G, i coranghi dei nuclei e dei conuclei sono limitati indipendentemente da F'. Inoltre, se $A[\ell^\infty](K)$ è finito, allora tali nuclei e conuclei hanno ordine finito.

Applicando il Lemma di Nakayama, si trovano poi le condizioni affinché $Sel_A(K)_\ell^\vee$ sia finitamente generato (sotto ulteriori ipotesi anche di torsione) su $\Lambda(G)$. Per ottenere maggiori informazioni sulla struttura del Selmer c'è bisogno inoltre di assumere che $\exists\, H \lhd_c \mathrm{Gal}(K/F)$ tale che $\mathrm{Gal}(K/F)/H \simeq \mathbb{Z}_\ell$ e studiarlo come modulo su $\Lambda(H)$. Per farlo si dimostra un teorema analogo al precedente, questa volta per la mappa

$$a_{K/K^H} : Sel_A(K^H)_\ell \longrightarrow Sel_A(K)_\ell^H .$$

Teorema
Sia K/F una estensione di Lie ℓ-adica non ramificata fuori da un insieme finito S di primi di F. Se esiste $H \lhd_c G := \mathrm{Gal}(K/F)$ tale che $G/H \simeq \mathbb{Z}_\ell$, allora il nucleo e il conucleo della mappa

$$a : Sel_A(K^H)_\ell \to Sel_A(K)_\ell^H$$

sono $\mathbb{Z}_\ell$-moduli cofinitamente generati. Inoltre, se $A[\ell^\infty](K)$ è finito, e per ogni $w|w'|v \in S$ il gruppo $A[\ell^\infty](K_w)$ è anch'esso finito, allora $Ker(a)$ e $Coker(a)$ sono finiti.

La principale conseguenza dei risultati summenzionati riguarda l'esistenza di elementi caratteristici in $\Lambda(G)$ per $Sel_A(K)_\ell^\vee$.
Viene anche trattato lo stesso problema nel caso $\ell = p$, ottenendo il seguente

Teorema
Sia K/F una estensione di Lie p-adica non ramificata fuori da un insieme finito S di primi di F. Se tutti i primi ramificati hanno riduzione buona o moltiplicativa spezzata, allora, per ogni estensione finita F'/F contenuta in K, i nuclei e i conuclei delle mappe

$$a_{K/F'} : Sel_A(F')_p \longrightarrow Sel_A(K)_p^{\mathrm{Gal}(K/F')}$$

sono $\mathbb{Z}_p$-moduli cofinitamente generati. Se il gruppo $A[p^\infty](K)$ è finito, tutti i primi in S sono di buona riduzione e hanno gruppi di inerzia aperti nei loro gruppi di decomposizione, allora i nuclei e i conuclei sono finiti (di ordine limitato se i primi di cattiva riduzione hanno gruppo di decomposizione aperto).

Nell'ultimo capitolo si dà un quadro più completo della struttura del Selmer, ma solo per il caso $\ell \neq p$. In particolare, si studiano le condizioni affinché $Sel_A(K)_l^\vee$ non abbia sottomoduli non banali pseudo-nulli. Il risultato principale è il seguente:

Teorema
Sia $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ un gruppo di Lie ℓ-adico senza elementi di ordine ℓ e di dimensione $d \geqslant 3$ (come gruppo di Lie ℓ-adico). Se $H^2(F_S/K, A[\ell^\infty]) = 0$ e la mappa ψ nella successione

$$Sel_A(K)_\ell \hookrightarrow H^1(F_S/K, A[\ell^\infty]) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_S \mathrm{Coind}_G^{G_v} H^1(K_w, A)[\ell^\infty]$$

è suriettiva, allora $\mathcal{S} := Sel_A(K)_\ell^\vee$ non ha sottomoduli non banali pseudo-nulli.

Il capitolo si conclude con il calcolo della caratteristica di Eulero di $Sel_A(K)_\ell$:

Teorema
Se $Sel_A(F)_\ell$ è finito, $H^2(F_S/K, A[\ell^\infty]) = 0$, $\chi(G, A[\ell^\infty])$ e $\chi(G_v, A[\ell^\infty])$ ($v \in S$) sono ben definiti e la mappa ψ nella successione

$$Sel_A(K)_\ell \hookrightarrow H^1(F_S/K, A[\ell^\infty]) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_S \mathrm{Coind}_G^{G_v} H^1(K_w, A[\ell^\infty])$$

è suriettiva, allora la caratteristica di Eulero di $Sel_A(K)_\ell$ è ben definita e

$$\chi(G, Sel_A(K)_\ell) = \prod_{v \in S} \frac{1}{c_v} \cdot \frac{|H^1(F_S/K, A[\ell^\infty])^G|}{|H^3(G, A[\ell^\infty](K))|}$$

dove $c_v = |H^1(K_w, A[\ell^\infty])^{G_v}|$ per ogni $v \in S$.

Maria Valentino