**Naturali, interi, razionali**

I primi numeri che si incontrano sono gli interi positivi, detti anche numeri naturali: 1, 2, 3…

L’insieme dei numeri naturali si indica con il simbolo N. Sono i numeri che servono a contare e che hanno fatto la prima comparsa nelle società umane svariate migliaia di anni fa. Per fare misure di quantità fisiche come lunghezze, aree, tempi, temperature, ecc., è tuttavia necessario poter disporre di sotto parti dell’unità e considerare quindi numeri frazionari *m*/*n* dove *m, n* ∈ N con *n* ≠0.

E’ poi conveniente anche introdurre i numeri con il segno per poter trattare grandezze negative come possono essere la temperatura, la velocità e molte altre grandezze fisiche. Si ottengono così i seguenti insiemi numerici:

Z={0, ±1, ±2, ±3, ±4, ….. } numeri interi relativi,

Q={$\frac{m}{n} /m$,*n* ∈Z, n≠0 } numeri razionali,

Si hanno le evidenti inclusioni N ⊆ Z ⊆ Q.

**Perché servono altri numeri?**

Su di una retta *r*, fissiamo un punto che indicheremo con 0 ed un altro punto, a destra di 0, denominato 1.

Usando come unità di lunghezza quella del segmento da 0 a 1 ed i due versi possibili (a destra e a sinistra di 0), si possono così facilmente rappresentare, sulla retta *r*, i numeri interi relativi come mostrato nella seguente figura.



Ogni numero razionale `e così univocamente rappresentato da un punto sulla retta. Sarà vera la cosa contraria? In realtà il problema non `e ben posto in quanto non abbiamo dato una definizione esatta di retta. Affidiamoci tuttavia alla nostra intuizione di retta come un continuo di punti allineati intendendo per continuo il fatto che non ci siano ’buchi’ nella retta. Costruiamo ora sul segmento da 0 a 1 un quadrato; poi, con un compasso, facciamo centro in 0, apriamo con raggio determinato dal vertice del quadrato opposto a 0 e tracciamo un arco di circonferenza fino ad incontrare la retta *r* in un certo punto *P*. Che numero rappresenta *P*?



Considerato che il numero associato ad un punto della retta può essere pensato come la lunghezza, con eventuale segno, del segmento dal punto all’origine 0, risulta chiaro che *P* deve rappresentare il numero √2. Ma chi `e √2? **Può essere rappresentato come frazione**? La risposta `e nota da almeno due millenni, ma vale la pena ricordarla nella proposizione sotto

**Proposizione 1.1** √2 non `e un numero razionale, ovvero non può essere rappresentato come il rapporto di due numeri interi

**I numeri reali R**

I punti della retta *r* sono quindi più dei numeri razionali. Che tipo di numeri servono per poter rappresentare tutti i punti della retta? Sono i numeri reali che introdurremo attraverso le rappresentazioni decimali. Fissiamo prima alcune notazioni. Sulla retta *r* vi `e un ordinamento naturale:

se *a* e *b* sono due punti di *r*, scriveremo che *a* < *b* se *a* sta a sinistra di *b* e, *a* ≤ *b* se *a* < *b* o se *a* = *b*. Dati *a* e *b* di r con *a* < *b*, indicheremo con [a, b] il segmento dei punti tra *a* e *b* estremi inclusi, mentre con il simbolo ]a, b[ indicheremo lo stesso segmento senza estremi. Il segmento con uno soltanto dei due estremi verrà indicato, rispettivamente, con [a, b[ se contiene *a*, con ]a, b] se contiene *b*. I sottoinsiemi della retta del tipo [a, b], ]a, b[, [a, b[, ]a, b] verranno anche detti *intervalli*. Se *x*∈R e *k*<*x*<*k*+1 con *k*∈Z, allora fra *k* e *k*+1 ci sono infiniti elementi di R.

**Valore assoluto**

Introduciamo ora un concetto molto utile, quello di valore assoluto di un numero reale. Il valore assoluto conosciuto come “il numero senza segno “ha la seguente precisa definizione:



Spesso ci troveremo a dover considerare diseguaglianze del tipo |*x*| ≤ *a* dove *a* ∈ R.

Poichè per definizione |*x*| ≥ 0 si ha che la suddetta diseguaglianza non ha soluzioni se *a* < 0.

Nel caso invece in cui ***a* ≥ 0** si ha che

|*x*| ≤ *a* ⇐⇒ −*a* ≤ *x* ≤ *a*

Se invece consideriamo |*x*| ≥ *a*, essa `e sempre soddisfatta se *a* ≤ 0, mentre, se *a* > 0 si ha

|*x*| ≥ *a* ⇐⇒ *x* ≤ −*a* oppure *x* ≥ *a*

Il valore assoluto gode di alcune importanti proprietà:

|x + y| ≤ |x| + |y|

|x \* y| = |x| \* |y|

**Proprietà di continuità**

Anche i razionali Q godono delle proprietà algebriche e di ordinamento, in altri termini anche Q è un ordinato. Ciò che in effetti differenzia i due insiemi numerici riguarda la ’continuità dell’insieme dei numeri reali, la sua struttura di “retta senza buchi”

**Definizione** **MAX e MIN**

Sia A ⊆ R un sottoinsieme.

• Un elemento M ∈ A è detto massimo di A se per ogni *x* ∈ A *x* ≤ M.

• Un elemento m ∈ A `e detto minimo di A se per ogni *x* ∈ A *x* ≥ m.

Esempio:

A = [a, b]. Allora max A = *b* e min A = *a*.

E’ facile tuttavia costruire esempi di insiemi che non ammettono massimo e/o minimo:

Esempio

A = N. Allora non esiste il massimo mentre il minimo `e 1.

Esempio

A = Z. Allora non esiste nè il massimo, nè il minimo

Negli esempi precedenti la mancanza di minimo o massimo è collegata ad una ’illimitatezza’ dell’insieme stesso. Ovvero sono insiemi illimitati.

**Definizione**

Sia A ⊆ R un sottoinsieme di R.

• A è detto superiormente limitato se esiste L ∈ R tale che per ogni x ∈ A x ≤ L.

• A è detto inferiormente limitato se esiste l ∈ R tale che per ogni x ∈ A x ≥ l.

• A `e detto limitato se è sia inferiormente che superiormente limitato.

Chiaramente se A ammette massimo, esso è superiormente limitato e se ammette minimo è inferiormente limitato.

Un insieme superiormente limitato non necessariamente ammette massimo e un insieme inferiormente limitato non necessariamente ammette minimo.

Esempio

Sia A =]0, 1[, sia 0 che 1 non appartengono all’intervallo ma lo limitano inferiormente e superiormente.

Nel caso di A =]0, 1[ pur non esistendo nè massimo nè minimo, vi sono due numeri in un certo senso speciali per A: 0 e 1. 1 non `e il massimo perchè non sta in A, però ha una notevole proprietà:

* Se L `e un qualunque numero che sta alla destra di A cioè tale che per ogni x ∈ A L ≥ x, allora 1 ≤ L; in altri termini 1 è il più piccolo dei numeri che stanno alla destra di A.
* Similmente 0 può essere caratterizzato come il numero più grande che sta alla sinistra di A.

Questo ragionamento può essere fatto per ogni insieme limitato e conduce al cuore del problema di continuità.

**Definizione** **MAGGIORANTE e MINORANTE**

Sia dato un insieme A ⊆ R. Un numero reale ***L*** è detto *maggiorante* di A se per ogni x ∈ A L ≥ x.

Un numero reale ***l*** `e detto *minorante* di A se per ogni x ∈ A l ≤ x.

L’insieme dei maggioranti di A lo indicheremo con il simbolo A+, mentre quello dei minoranti con il simbolo A−.

E’ chiaro che A è superiormente limitato se e soltanto se esiste almeno un maggiorante, cio`e se A+ è non vuoto. Similmente, A è inferiormente limitato se e soltanto se A− è non vuoto. Inoltre il massimo, se esiste, è un maggiorante, mentre il minimo, se esiste, è un minorante.

Vale il seguente fondamentale risultato:

**Teorema**

Sia A ⊆ R. Allora:

(i) Se A `e superiormente limitato, A+ ammette minimo che viene detto l’*Estremo Superiore* di A (è il più piccolo dei maggioranti) e indicato con

sup A= min A+.

(ii) Se A `e inferiormente limitato, A− ammette massimo che viene detto l’*Estremo Inferiore* di A (è il più grande dei minoranti) e indicato con

inf A = max A−.

Esempio

Riprendiamo l’esempio: A =]0, 1[. Allora A+ = [1, +∞[ non ci sono maggioranti più piccoli di 1. Similmente, A− =] − ∞, 0]. Quindi sup A = 1 e inf A = 0.

**Teorema sulla radice di un’equazione di grado n**

Sia *n* ∈ N e sia *b* ≥ 0. Allora esiste uno ed un solo numero reale *a* ≥ 0 tale che *a* *n* = *b*. *a* viene detto la radice n-esima positiva di *b* ed indicato con i simbolo √n *b* o *b* *1/n* .

**Successioni e definizione di limite**

Definizione: Una successione (di numeri reali) `e un’applicazione da N a R, cioè una legge che associa ad ogni naturale *n* un ben determinato reale *an*.

*n*→*an*esempio *n*→$\frac{1}{n}$; *1*→$\frac{1}{1}$; *2*→$\frac{1}{2}$; *3*→$\frac{1}{3}$……

Formalizziamo il concetto intuitivo di una successione (*an*) che si avvicina ad un certo numero reale *l* quando *n* diventa sempre più grande.

**Definizione** Si dice che la successione (*an*) converge al numero *l* ∈ R se

∀ ∈ > 0 ∃*n0* ∈ N : ∀*n* ≥ *n0* si ha |*an* − *l*| < ∈

*l* viene detto limite della successione (*an*)

$$\lim\_{n\to \infty }a\_{n}=l$$

Poich`e |*an* − *l*| è la distanza di *an* da *l*, l’idea è che questa dovrebbe diventare piccola quanto vogliamo al crescere di *n*: cioè fissato un margine di errore qualunque ∈ > 0 si dovrà avere che |*an* − *l*| < ∈ se *n* è abbastanza grande