**Definizione Limite di successione:**

Si dice che la successione (*an*) *converge* al numero *l* ∈R se

∀ ∈ *>* 0 ∃ *n0* ∈N : ∀ *n* ≥ *n*0 si ha │*an*-*l*│ < ∈

viene detto *limite* della successione (*an*) e si usano le notazioni equivalenti

;

***Osservazioni sulla definizione di limite***: il concetto appena introdotto, di limite, è fondamentale e vale la pena di fare alcune considerazioni per chiarire a fondo la definizione data.

* La diseguaglianza │*an*-*l*│ < ∈ è equivalente a *l-*∈ *< an < l* + ∈ cioè al fatto che *an* si trova all'interno dell'intervallo ] *l-*∈*; l* + ∈ [. Tali intervalli si dicono anche *intorni (centrati)* di *l*. La successione (*an*) converge ad *l* quindi se per ogni intorno fissato di *l*, esiste *n*0 ∈N tale che *an* sta in questo intorno se *n ≥ n*0.
* Intuitivamente il limite di una successione è quel numero, se esiste, al quale i valori della successione si avvicinano.

Esempi di successioni:

* *an*= *n*-5 per *n* > 5

**Teorema** (**della permanenza del segno**) Sia (an) una successione convergente ad un limite l ≠0. Allora, definitivamente (da un certo punto in poi), il segno di *an* e di *l* sono identici.

**Limiti: prime proprietà**

Per poter determinare i limiti delle successioni con una certa disinvoltura, senza ogni volta dover ricorrere alla definizione, è necessario sviluppare un po' di teoria. Iniziamo con un risultato chiave:

**Teorema (del confronto)**

Siano (*an*), (*bn*) e (*cn*) tre successioni tali che

∀n∈N

Supponiamo inoltre che (*an*) e (*cn*) convergano con

Allora anche (*bn*) risulta convergente e

**Definizione** Una successione (*an*) si dice limitata se esiste L ∈ R tale che |an| ≤ L per ogni n ∈ N.

La limitatezza è, a differenza del concetto di limite, una proprietà che riguarda soltanto l'immagine della successione che è un sottoinsieme di numeri reali.

**Proposizione** Sia (*an*) una successione che ammette limite, allora essa è limitata.

**Definizione** Sia (*an*) una successione.

Si dice che (*an*) tende a +∞ se fissato un qualunque M ∈ R si ha che *an* > M definitivamente. Si usano le notazioni:

Si dice che (*an*) tende a -∞1 se fissato un qualunque M ∈ R si ha che an < M definitivamente. Si usano le notazioni:

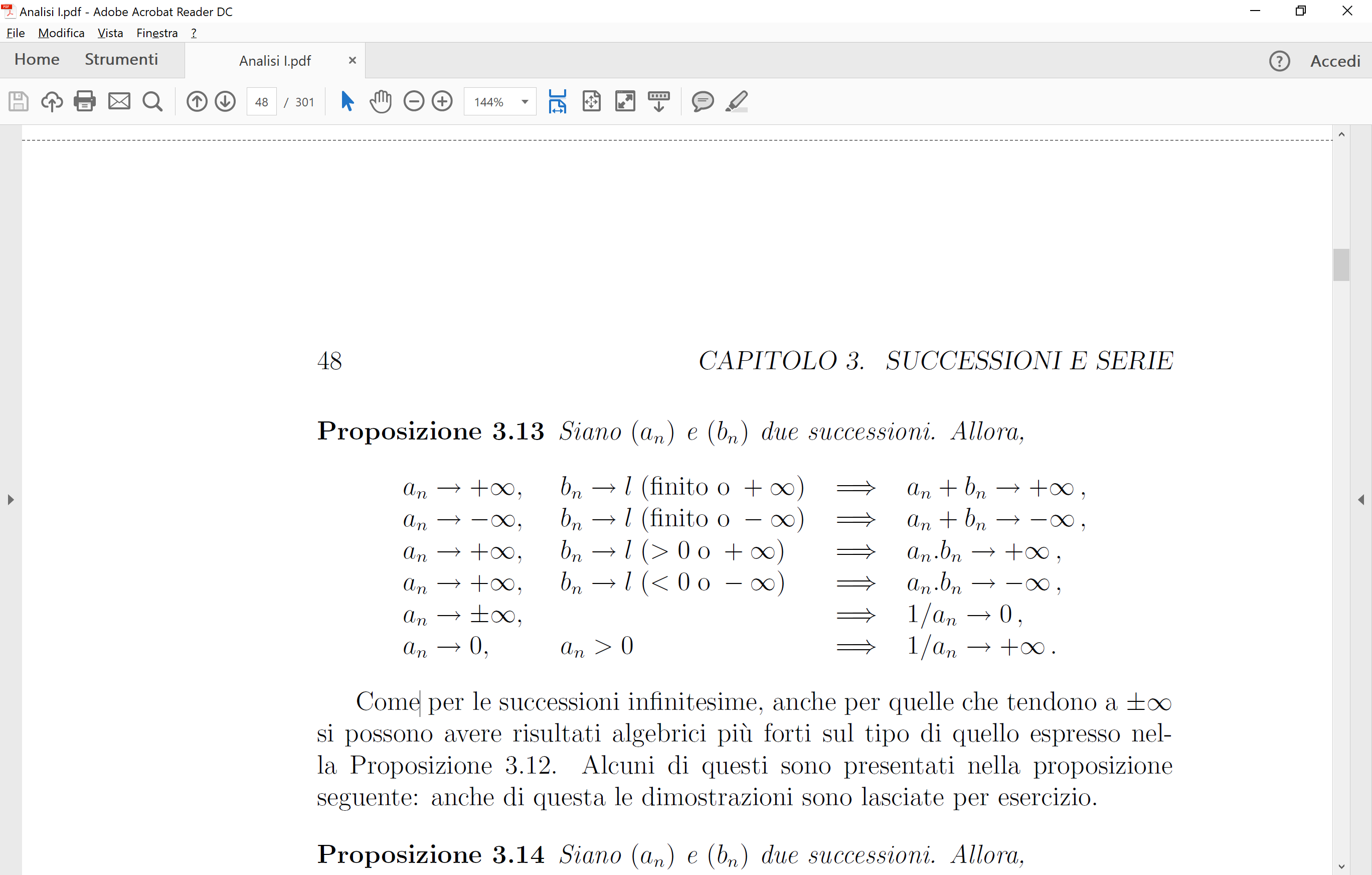
Siano (*an*) e (*bn*) due successioni. Si può considerare la successione somma (*an*+*bn*), la successione prodotto (*an* x *bn*) e, se *bn* ≠ 0 per ogni *n*, la successione quoziente (*an* / *bn*). Il comportamento al limite di tali successioni segue le regole dell'algebra:

**Proposizione** Siano (*an*) e (*bn*) due successioni convergenti: e

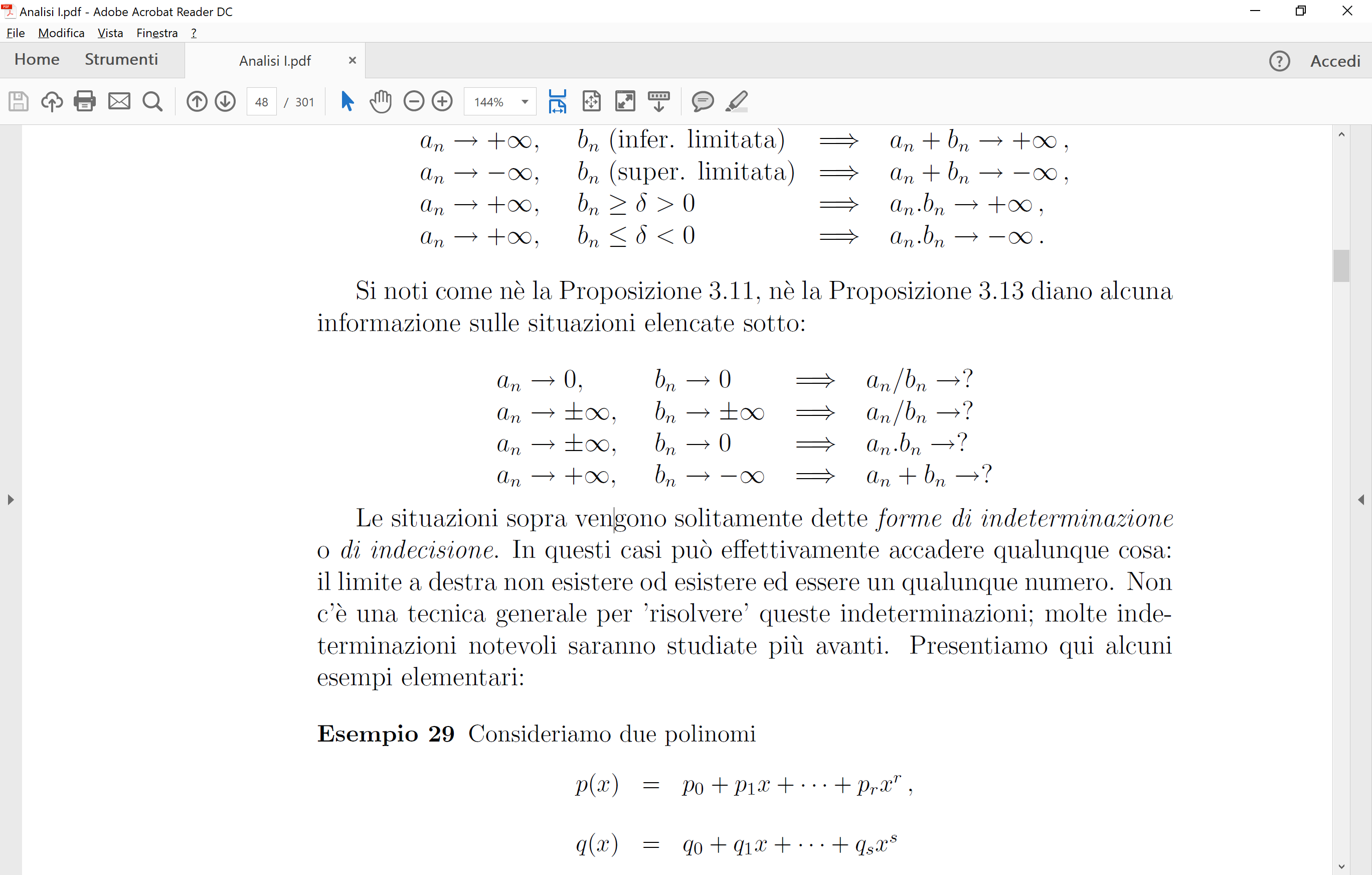
Allora *an* + *bn* = *l1* + *l2*; *an* x *bn* = *l1* x *l2*

Inoltre se *bn* ≠0 per ogni *n*, e *l2* ≠0, si ha anche *an*/*bn* = *l1*/*l2*

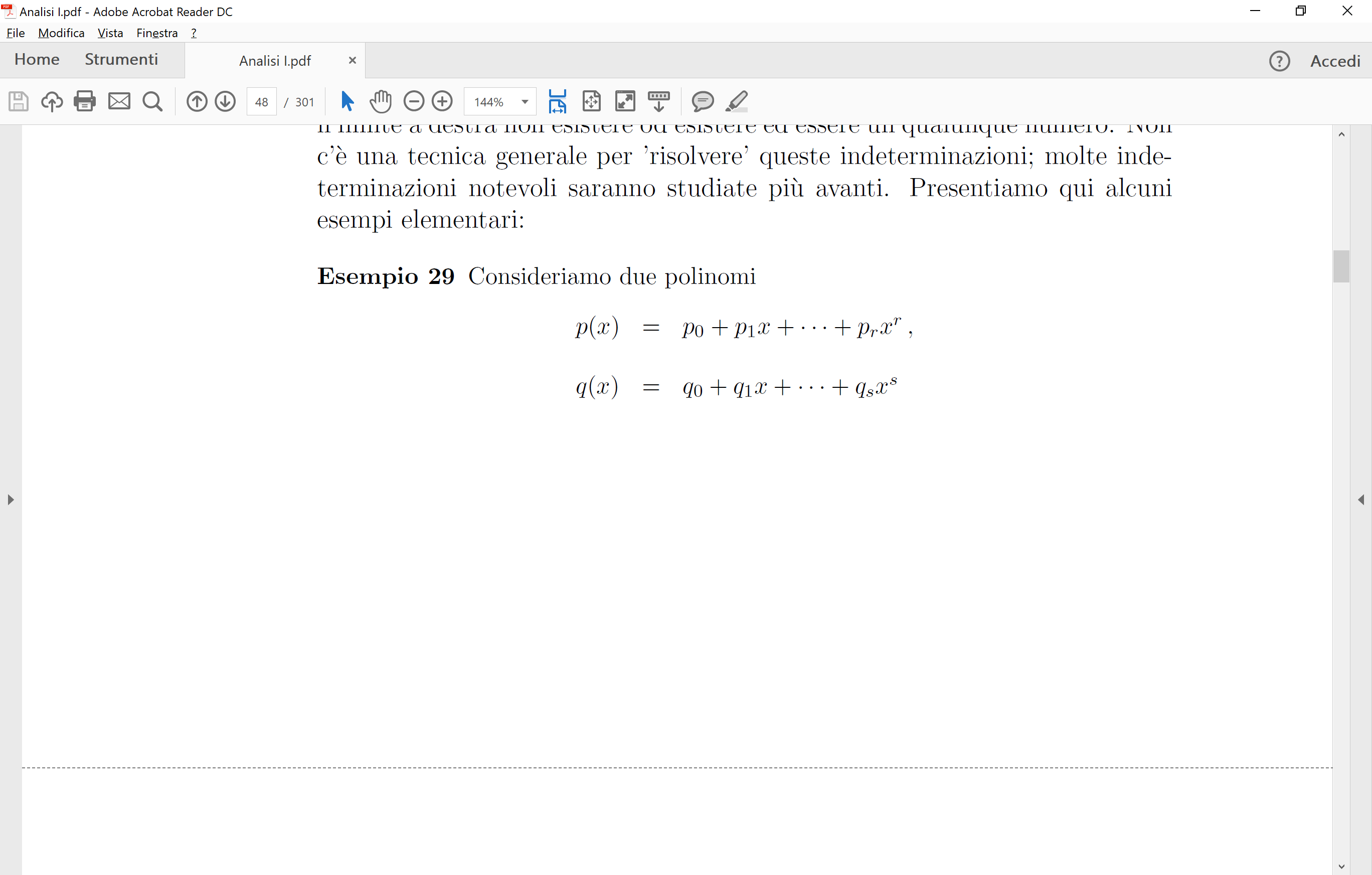
**Definizione** Le successioni che convergono a zero vengono anche dette ***infinitesime***. Somma e prodotto di funzioni infinitesime sono infinitesime

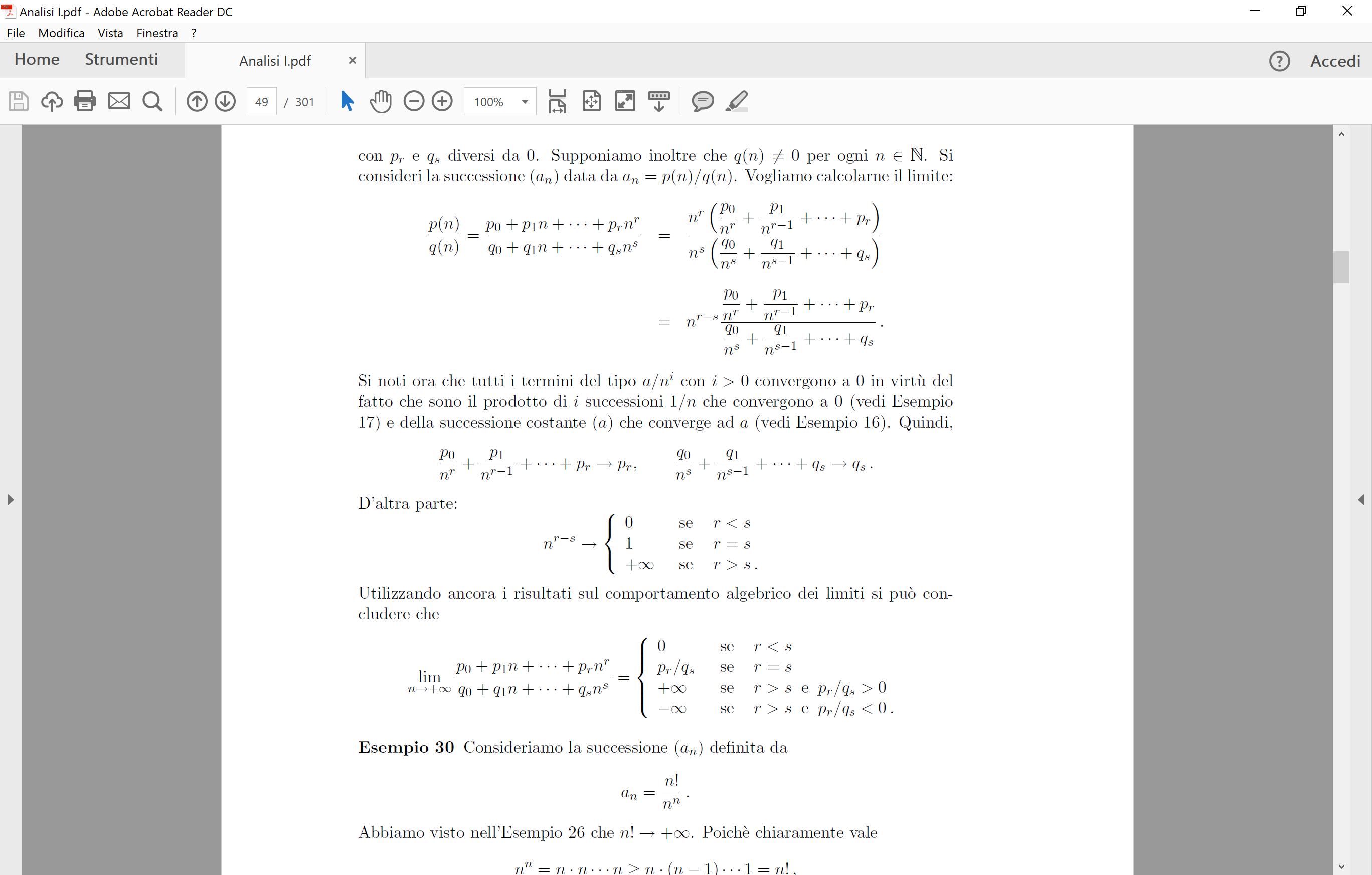


**FORME INDETERMINATE**



**Calcolo dei Limiti**





**Successioni monotone**

Introduciamo ora una classe molto importante di successioni:

**Definizione** Una successione (*an*) si dice

* crescente se *an+1* ≥ *an* per ogni *n*;
* strettamente crescente se *an+1* > an per ogni *n*;
* decrescente se *an+1* ≤ *an* per ogni *n*;
* strettamente decrescente se *an+1* ≤ *an* per ogni *n*.

Le successioni crescenti o decrescenti vengono anche dette **monotone**.

**LIMITI NOTEVOLI**

|  |  |
| --- | --- |
| Sia *x* > 1 e *r*∈N |  |
| Sia *x* ∈ R, si ha |  |
| Si ha |  |
| Numero di Nepero 2 < *e* < 3 |  |

**Funzioni di variabile reale**

Una funzione è una legge che associa ad una variabile indipendente (in ingresso) il valore di una variabile dipendente (uscita), univocamente assegnato Naturalmente i valori che può assumere la variabile indipendente dipendono dall'esempio specifico considerato.

La funzione

*f* : A ⊆ R → R

ha come dominio un sottoinsieme A di numeri reali e come codominio l'insieme dei numeri reali. Tali funzioni sono spesso dette funzioni reali di variabile reale. consideriamo una funzioni del tipo

*f* : A ⊆ R → B ⊆ R;

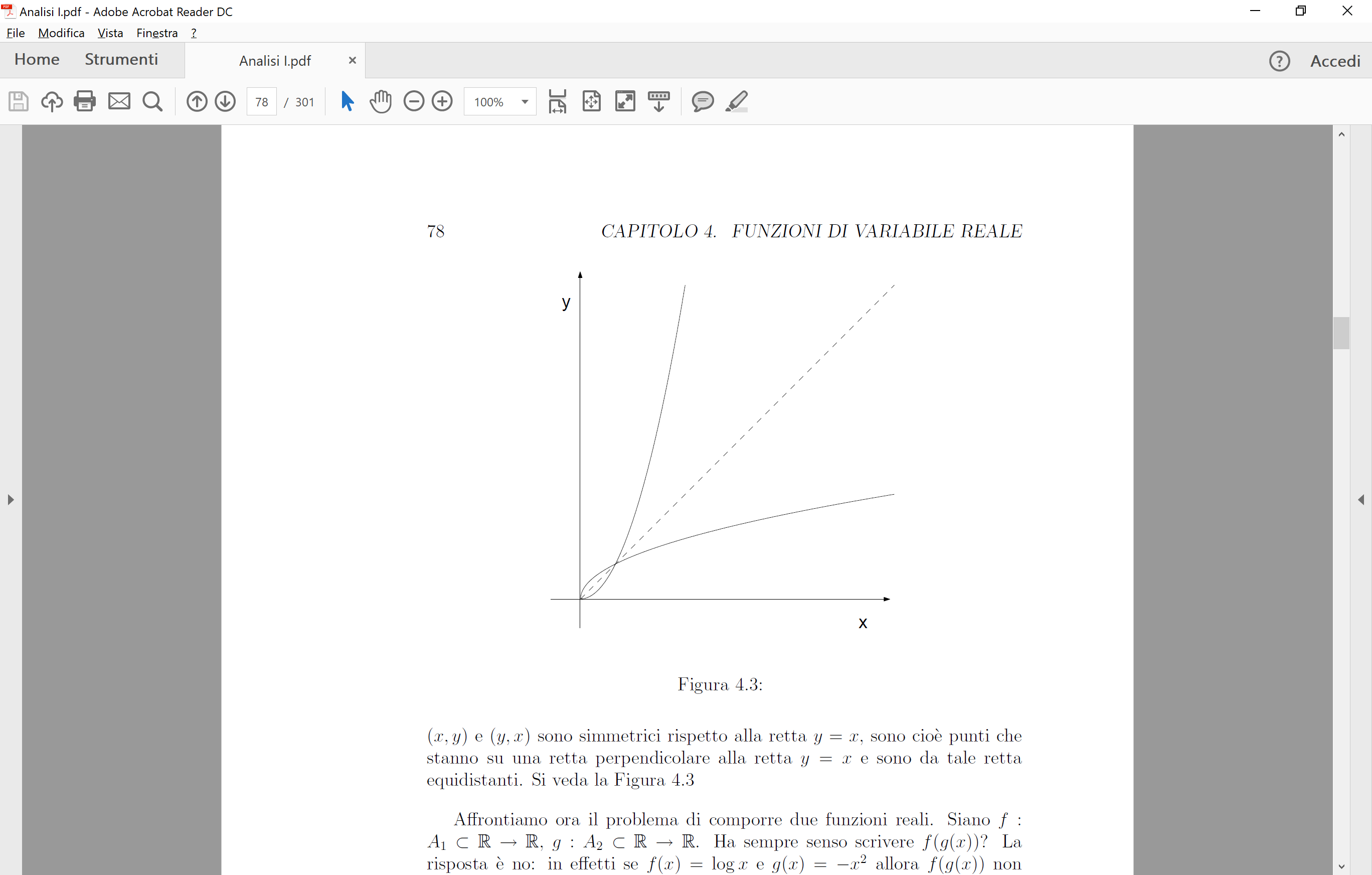
cioè una funzione per la quale si sa a priori che l'insieme dei possibili valori assunti dalla f è un insieme contenuto in R ma non necessariamente coincidente con esso; questo specialmente quando si discute l'invertibilità di una funzione. Il **codominio** è un insieme a cui si sa a priori (senza cioè un'indagine accurata sulla funzione) che i valori di f appartengono. L'**immagine** invece è esattamente l'insieme dei valori assunti da f, cioè il più **piccolo codominio possibile**, dove il termine più piccolo si riferisce all'inclusione insiemistica. Assegnata una funzione, possiamo innanzitutto determinare il grafico. Esso è un sottoinsieme del piano cartesiano, ed è definito come l'insieme delle coppie (x; *f*(x)) con x appartenente al dominio A della funzione.

**Definizione** Data *f* : A → B, si tratta di studiare l'equazione *f*(x) = y per ogni fissato y ∈ B. Se tale equazione ha sempre (per ogni y ∈ B) almeno una soluzione x ∈ A, la funzione è **surgettiva**; se non ha mai più di una soluzione, essa è **iniettiva**. E' talvolta utile utilizzare un metodo grafico per verificare queste proprietà. Si consideri il grafico di *f* e, preso un punto y ∈ B, si tracci la retta orizzontale passante per (0; y). Se, qualunque sia y ∈ B, tale retta incontra sempre il grafico di *f*, vuol dire che la funzione è surgettiva; se tale retta non incontra mai più di una volta il grafico, vuol dire che la funzione è iniettiva. Una funzione iniettiva e suriettiva è **invertibile**.

**Esercizio** Mostrare che la funzione f : R → R definita da *f*(x) = 2x + 3 è invertibile, e determinarne esplicitamente l'inversa.

R: *f*-1(*x*) = x/2 – 3/2

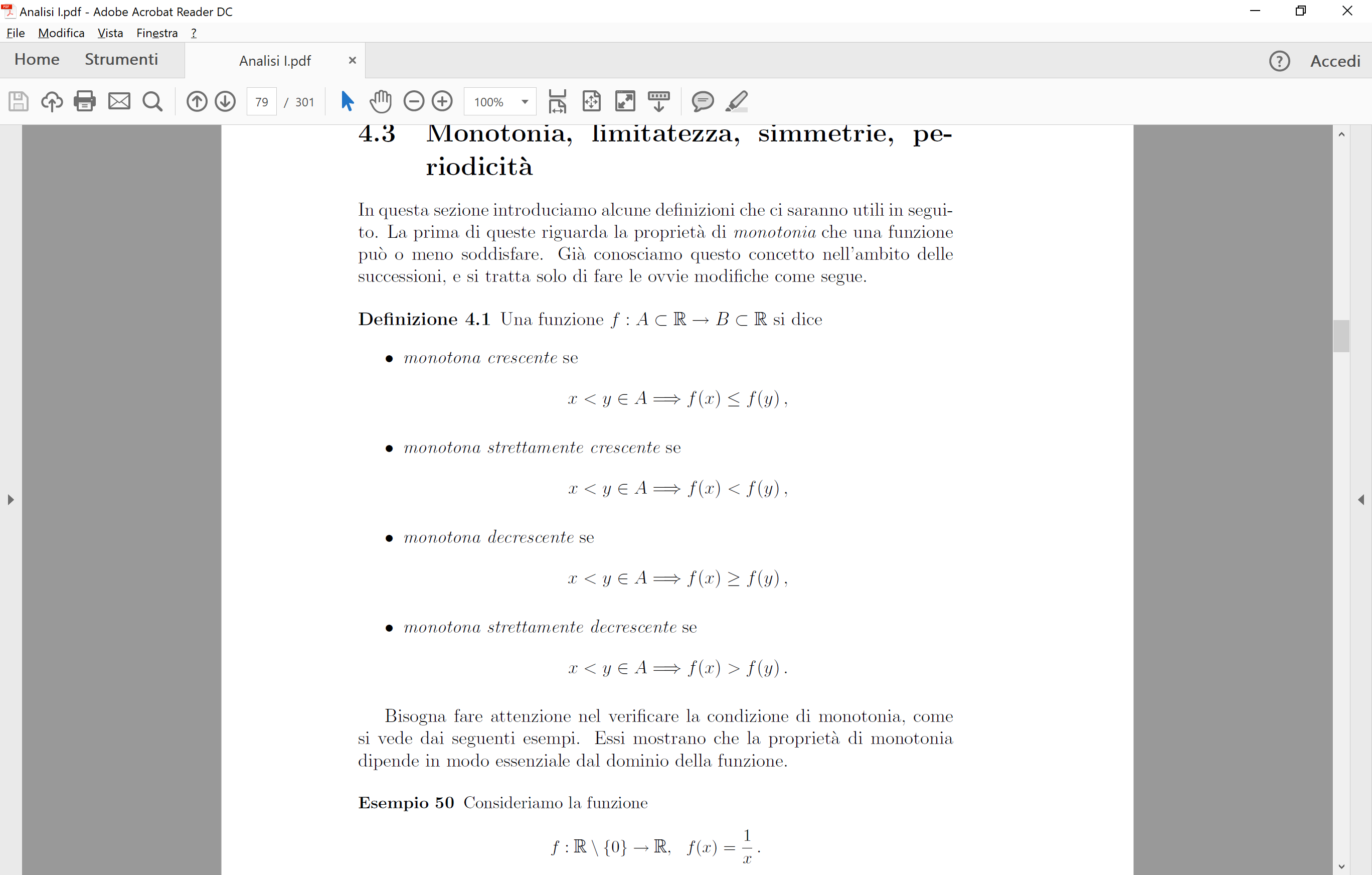
**Osservazione**: il grafico di una funzione inversa *f*-1 si ricava da quello di *f* per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. In effetti per definizione di inversa un punto (*x*; *y*) appartiene al dominio di *f* se e soltanto se (*y*; *x*) appartiene al grafico di *f*-1.



**Definizione**: Affrontiamo ora il problema di **comporre** due funzioni reali. Siano *f* : A1 ⊆ R → R,

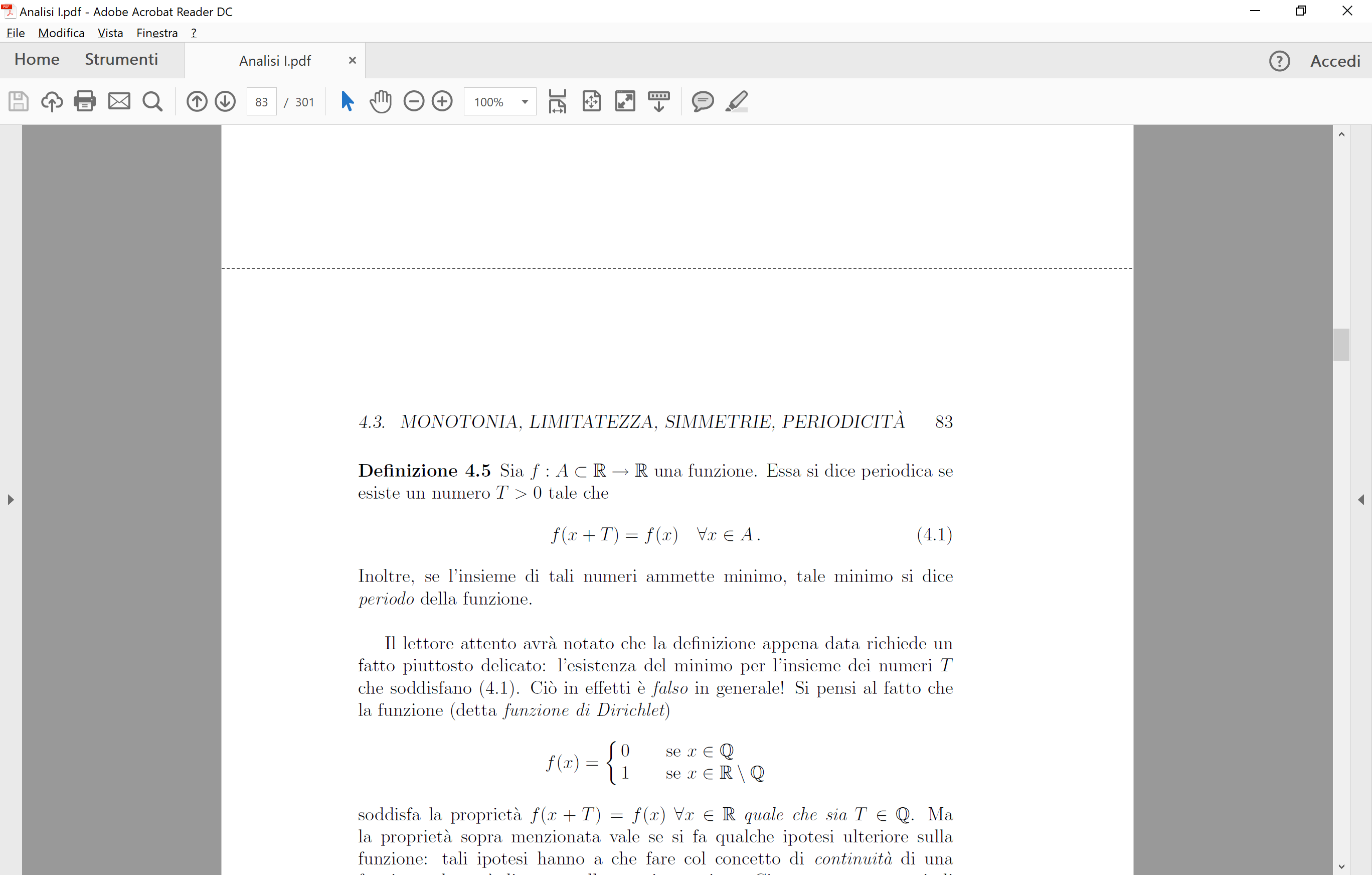
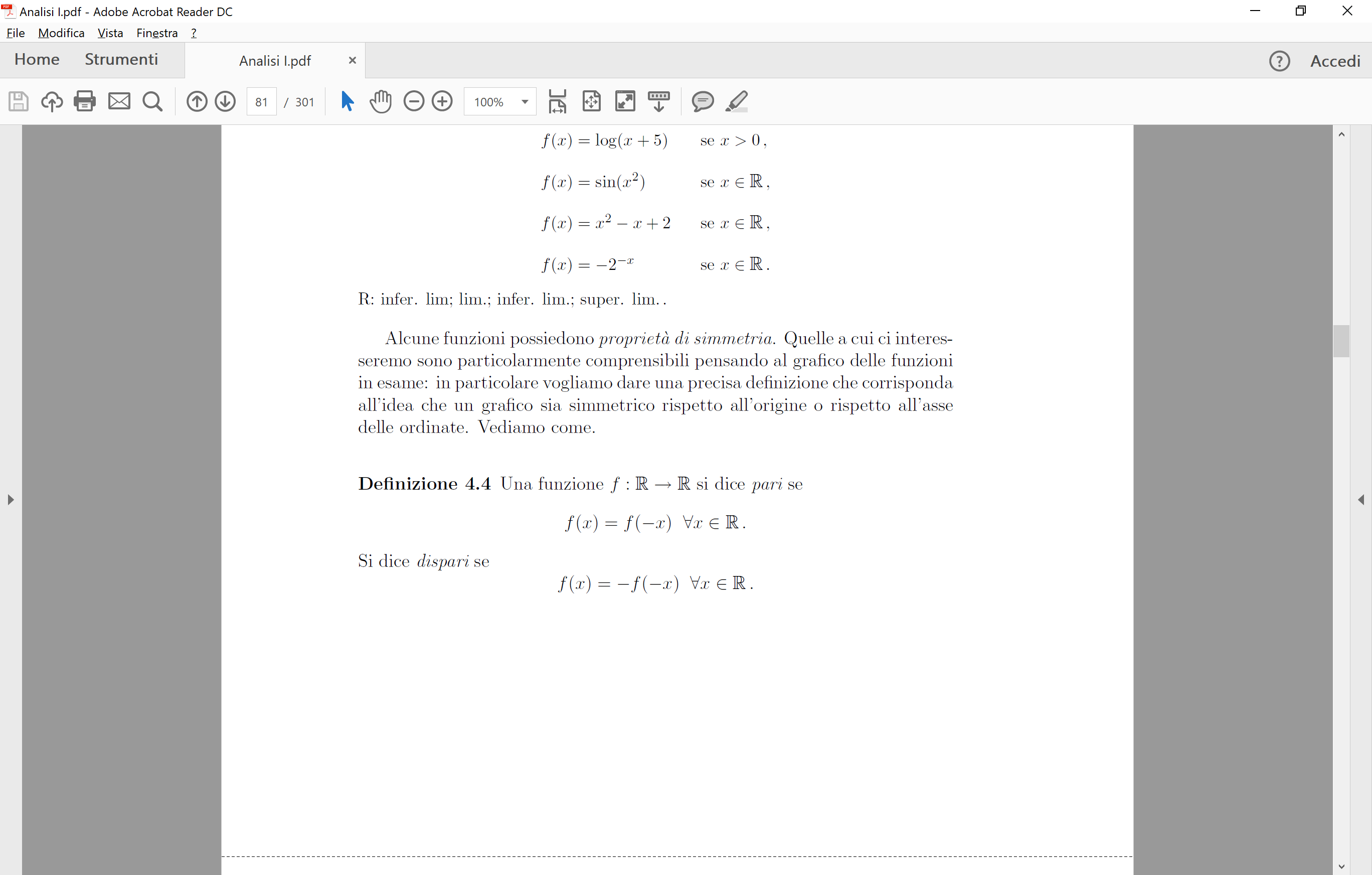
g : A2 ⊆ R → R. Ha sempre senso scrivere *f*(*g*(x))? La risposta è no: in effetti se *f*(x) = log x e *g*(x) = -x2 allora *f*(*g*(x)) non ha senso dato che non si può prendere il logaritmo di un numero negativo. Se però l'immagine di *g*, *g*(A2), è contenuta nel dominio di *f* allora ha perfettamente senso considerare *f*(*g*(*x*)) per ogni *x* ∈ A2: per esempio se *f*(x) = log x e *g*(x) = *x*2 + 1 allora log(*x*2 + 1) è un oggetto ben definito per ogni *x* ∈ R . *Il prodotto di composizione* ***non è commutativo***

***Definizione funzione monotona***

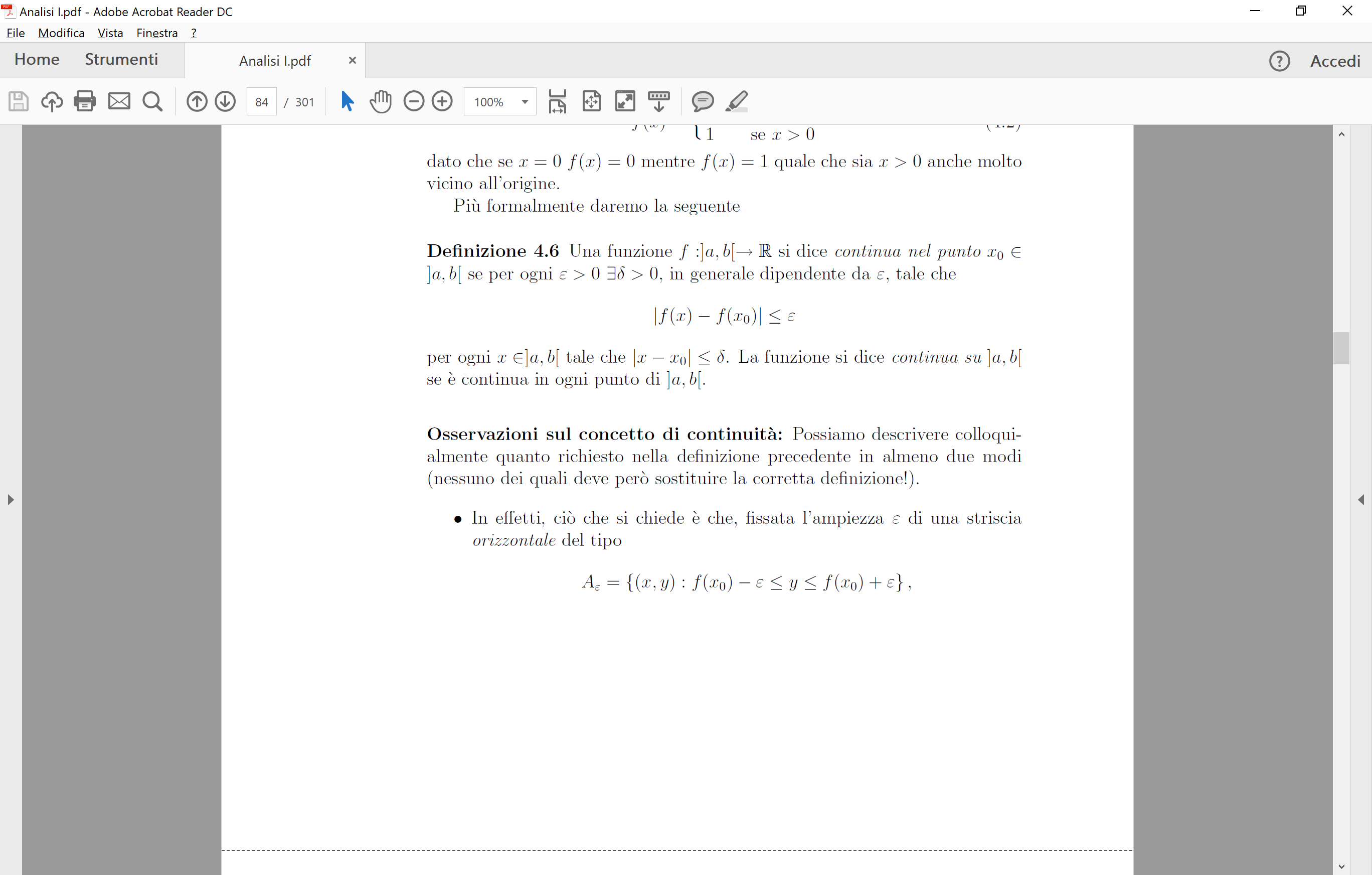


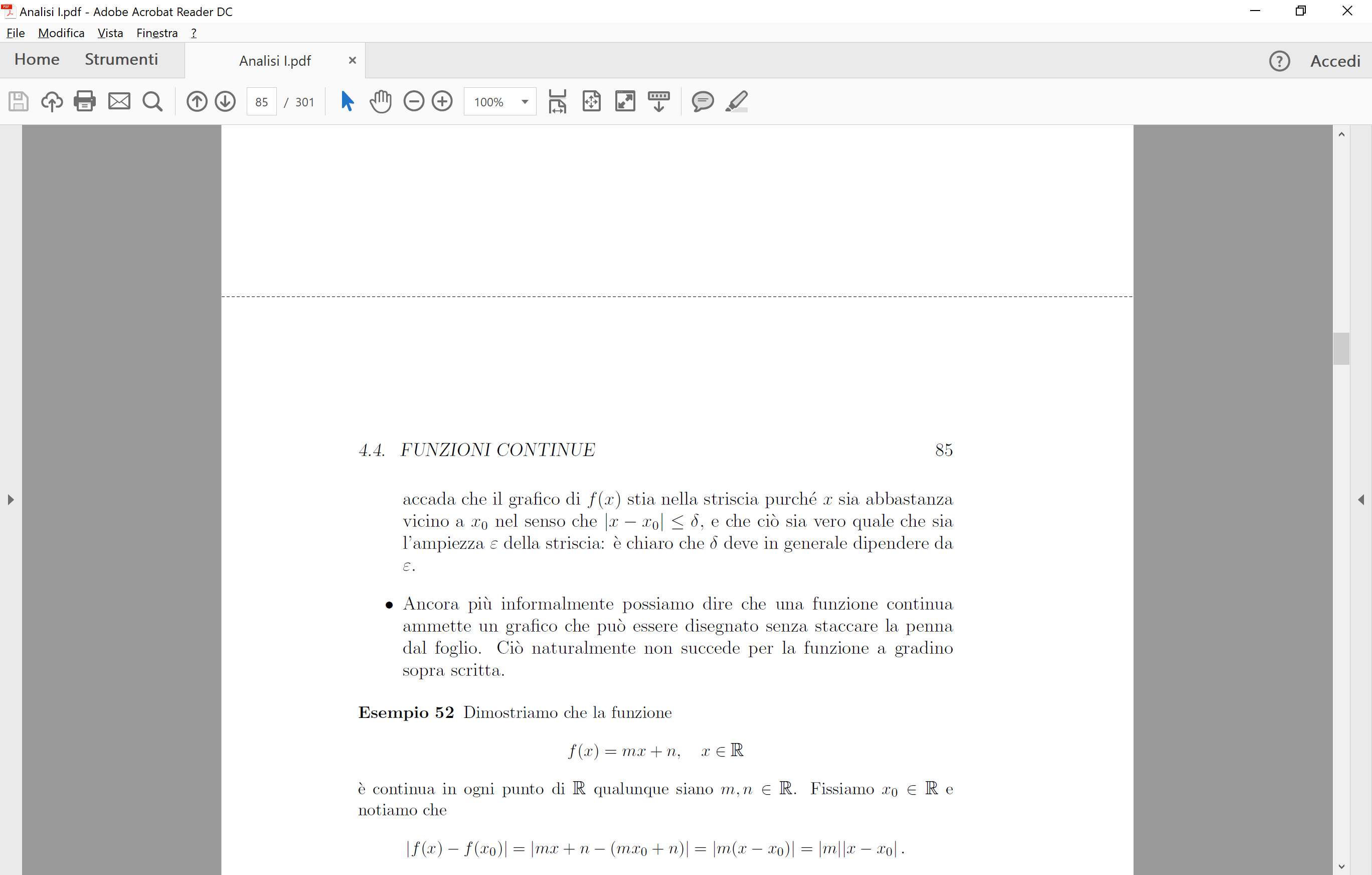
**Proposizione** Sia f : A ⊆ R → *f*(A) una funzione monotona strettamente crescente o strettamente decrescente. Allora f è invertibile.

**Definizione** Una funzione f : A ⊆ R → B ⊆ R si dice inferiormente limitata se la sua immagine è inferiormente limitata, cioè se esiste L ∈ R tale che *f*(x) ≥ L per ogni *x* ∈ A. Si dice superiormente limitata se la sua immagine è superiormente limitata, cioè se esiste M ∈ R tale che *f*(x) ≤ M per ogni *x* ∈ A. Si dice limitata se è sia inferiormente che superiormente limitata.



**FUNZIONE CONTINUA**





**Proprietà delle funzioni continue**

