**Funzioni di variabile reale**

Una funzione è una legge che associa ad una variabile indipendente (in ingresso) il valore di una variabile dipendente (uscita), univocamente assegnato Naturalmente i valori che può assumere la variabile indipendente dipendono dall'esempio specifico considerato.

La funzione

*f* : A ⊆ R → R

ha come dominio un sottoinsieme A di numeri reali e come codominio l'insieme dei numeri reali. Tali funzioni sono spesso dette funzioni reali di variabile reale. consideriamo una funzioni del tipo

*f* : A ⊆ R → B ⊆ R;

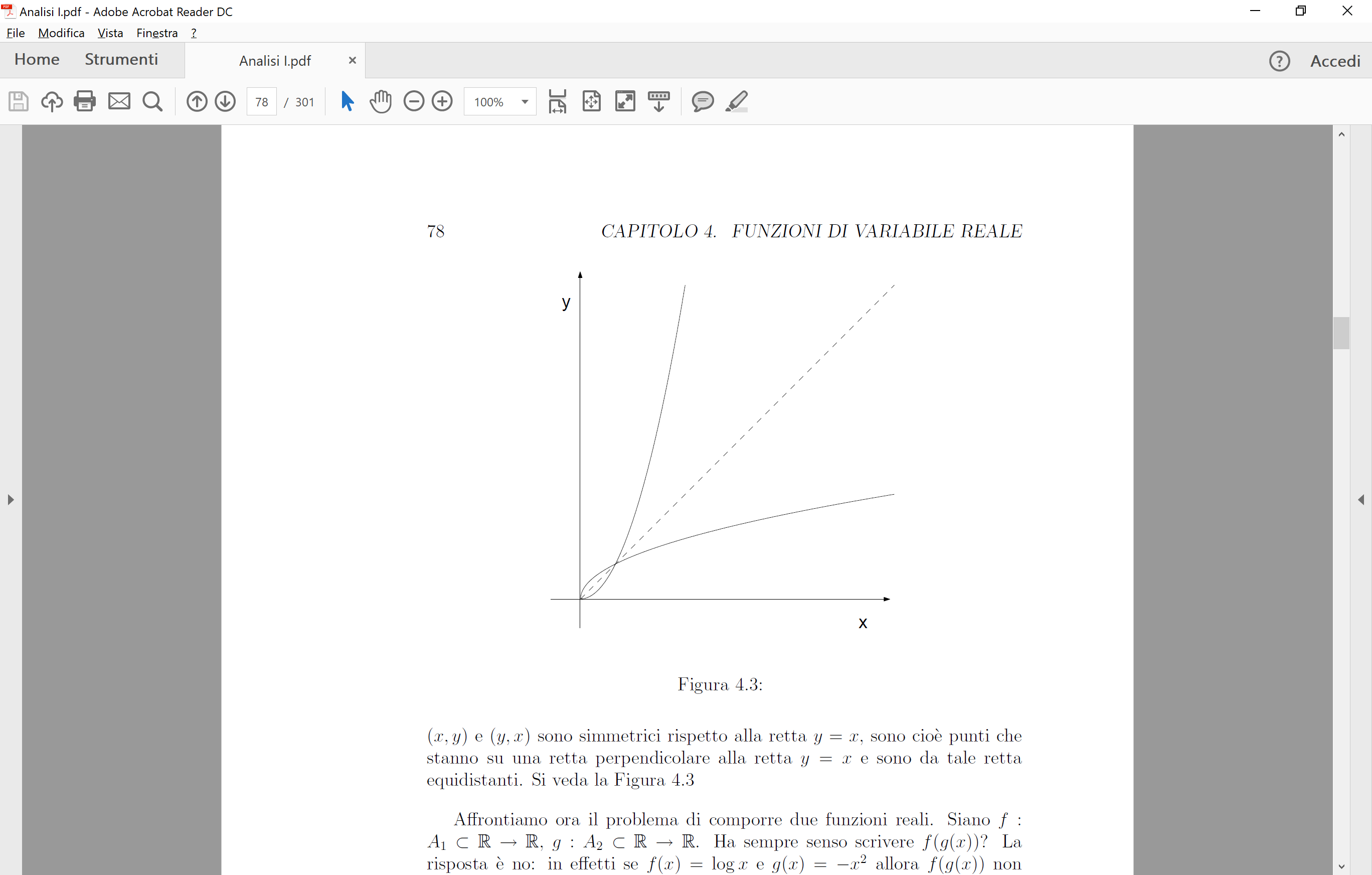
cioè una funzione per la quale si sa a priori che l'insieme dei possibili valori assunti dalla f è un insieme contenuto in R ma non necessariamente coincidente con esso; questo specialmente quando si discute l'invertibilità di una funzione. Il **codominio** è un insieme a cui si sa a priori (senza cioè un'indagine accurata sulla funzione) che i valori di f appartengono. L'**immagine** invece è esattamente l'insieme dei valori assunti da f, cioè il più **piccolo codominio possibile**, dove il termine più piccolo si riferisce all'inclusione insiemistica. Assegnata una funzione, possiamo innanzitutto determinare il grafico. Esso è un sottoinsieme del piano cartesiano, ed è definito come l'insieme delle coppie (x; *f*(x)) con x appartenente al dominio A della funzione.

**Definizione** Data *f* : A → B, si tratta di studiare l'equazione *f*(x) = y per ogni fissato y ∈ B. Se tale equazione ha sempre (per ogni y ∈ B) almeno una soluzione x ∈ A, la funzione è **surgettiva**; se non ha mai più di una soluzione, essa è **iniettiva**. E' talvolta utile utilizzare un metodo grafico per verificare queste proprietà. Si consideri il grafico di *f* e, preso un punto y ∈ B, si tracci la retta orizzontale passante per (0; y). Se, qualunque sia y ∈ B, tale retta incontra sempre il grafico di *f*, vuol dire che la funzione è surgettiva; se tale retta non incontra mai più di una volta il grafico, vuol dire che la funzione è iniettiva. Una funzione iniettiva e suriettiva è **invertibile**.

**Esercizio** Mostrare che la funzione f : R → R definita da *f*(x) = 2x + 3 è invertibile, e determinarne esplicitamente l'inversa.

R: *f*-1(*x*) = x/2 – 3/2

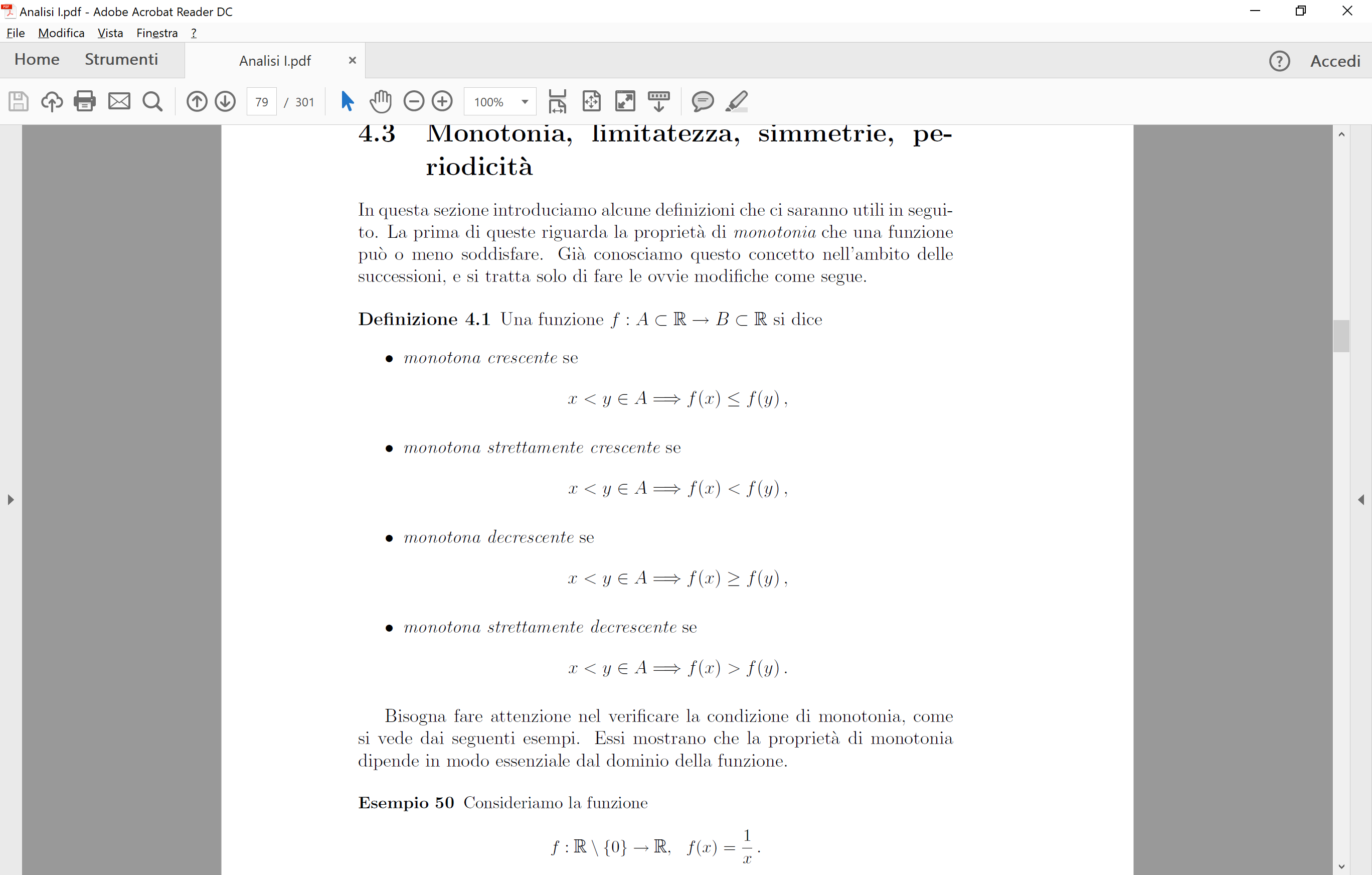
**Osservazione**: il grafico di una funzione inversa *f*-1 si ricava da quello di *f* per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. In effetti per definizione di inversa un punto (*x*; *y*) appartiene al dominio di *f* se e soltanto se (*y*; *x*) appartiene al grafico di *f*-1.



**Definizione**: Affrontiamo ora il problema di **comporre** due funzioni reali. Siano *f* : A1 ⊆ R → R,

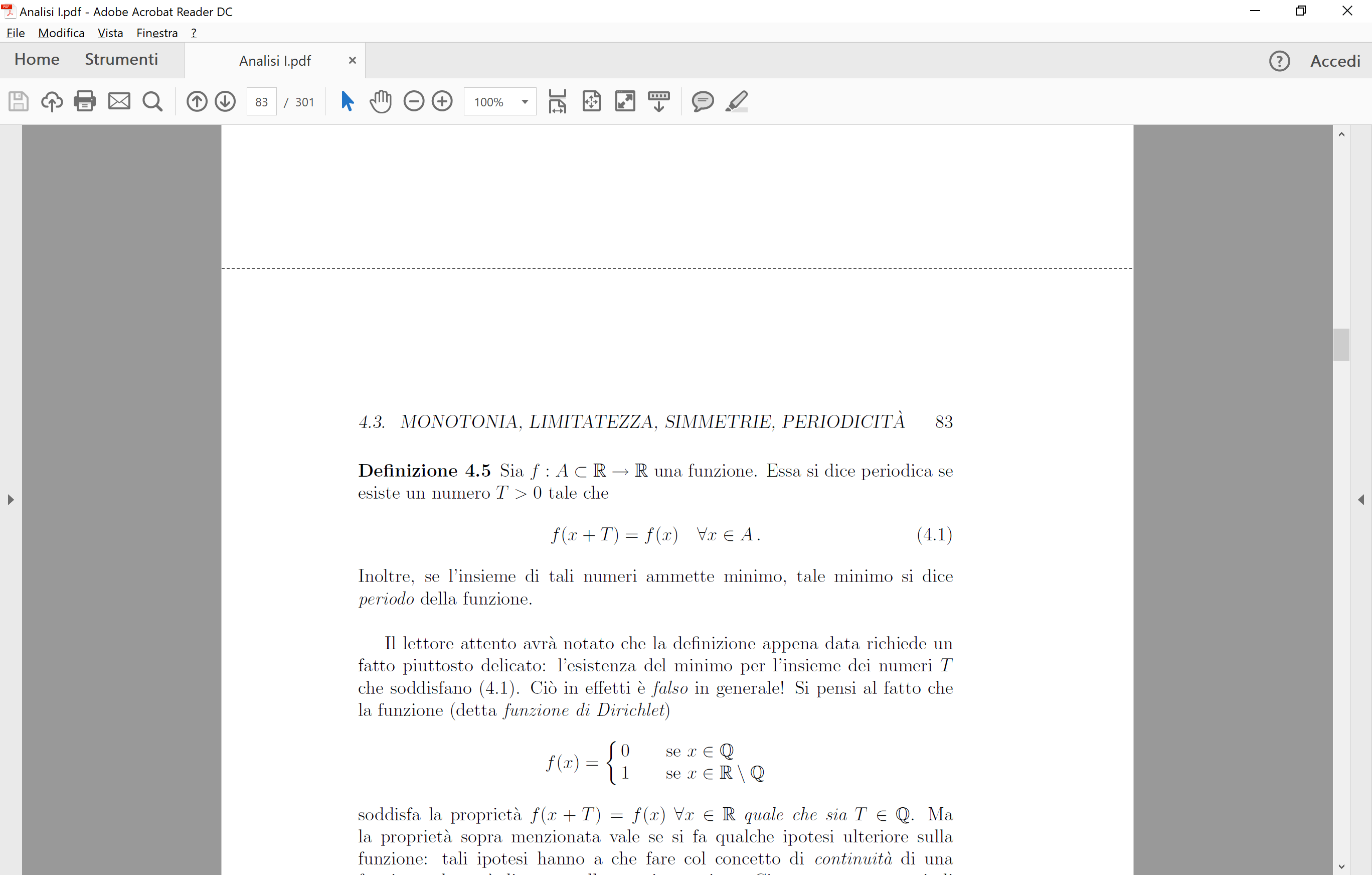
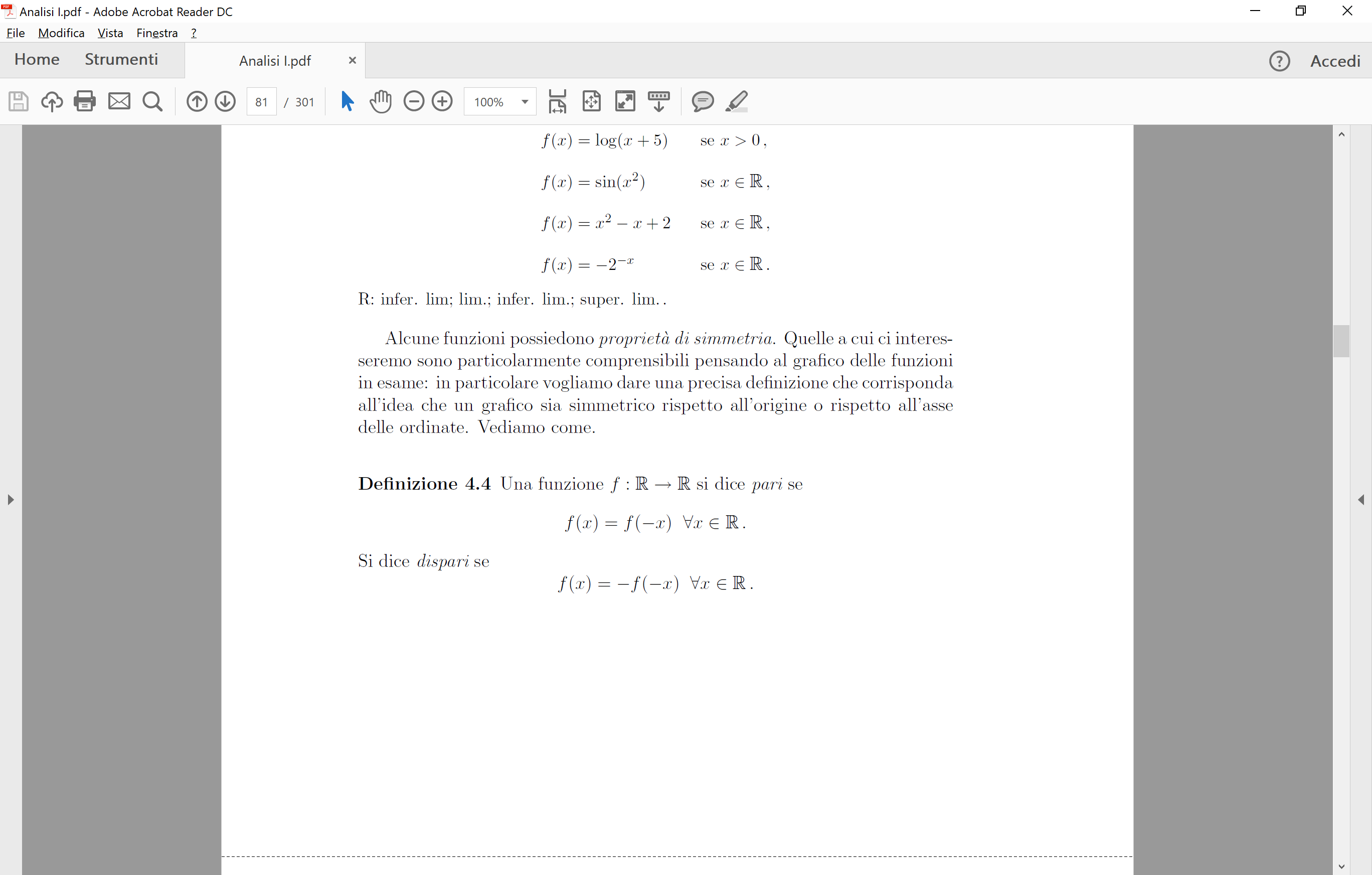
g : A2 ⊆ R → R. Ha sempre senso scrivere *f*(*g*(x))? La risposta è no: in effetti se *f*(x) = log x e *g*(x) = -x2 allora *f*(*g*(x)) non ha senso dato che non si può prendere il logaritmo di un numero negativo. Se però l'immagine di *g*, *g*(A2), è contenuta nel dominio di *f* allora ha perfettamente senso considerare *f*(*g*(*x*)) per ogni *x* ∈ A2: per esempio se *f*(x) = log x e *g*(x) = *x*2 + 1 allora log(*x*2 + 1) è un oggetto ben definito per ogni *x* ∈ R . *Il prodotto di composizione* ***non è commutativo***

***Definizione funzione monotona***

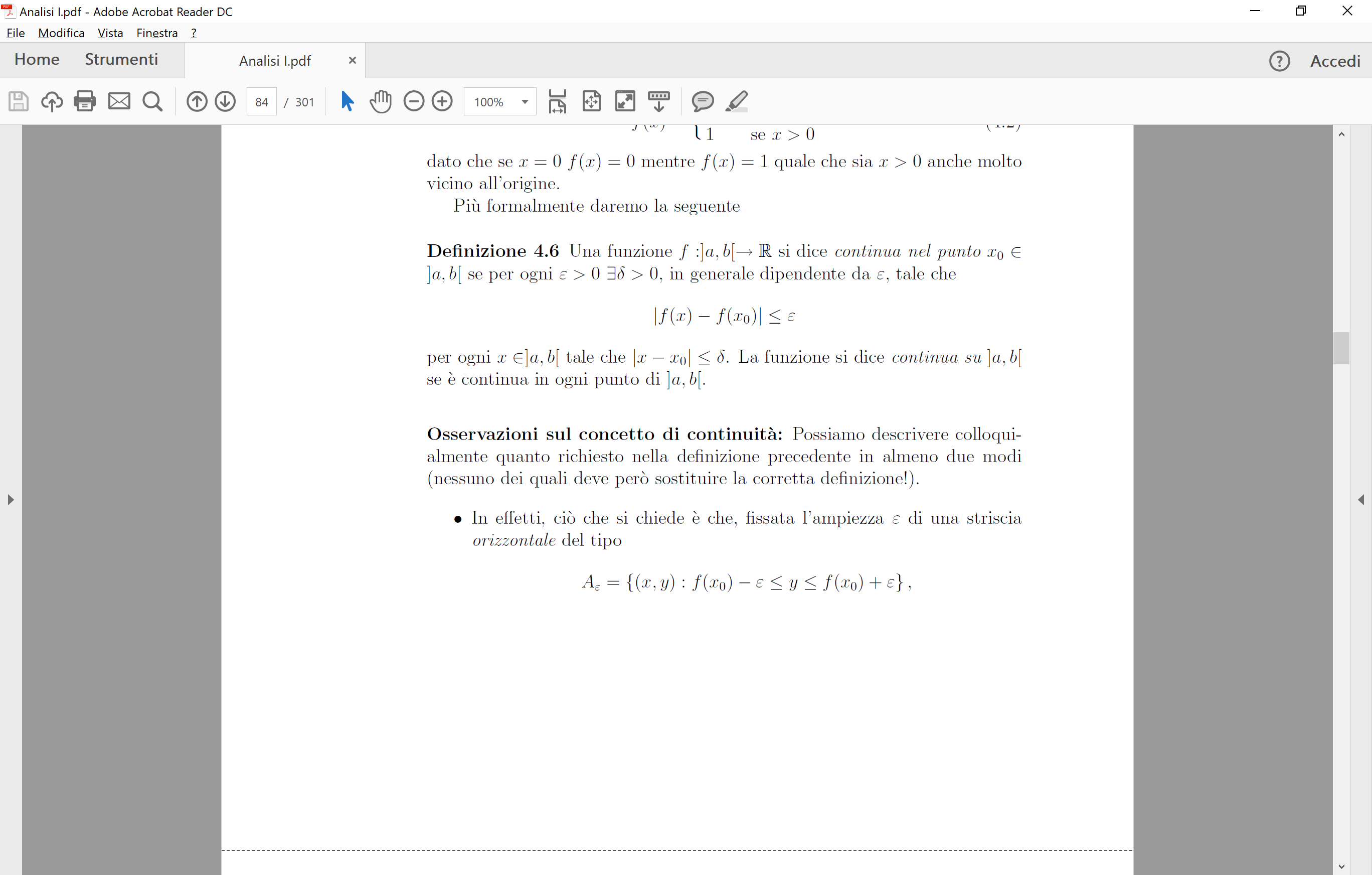


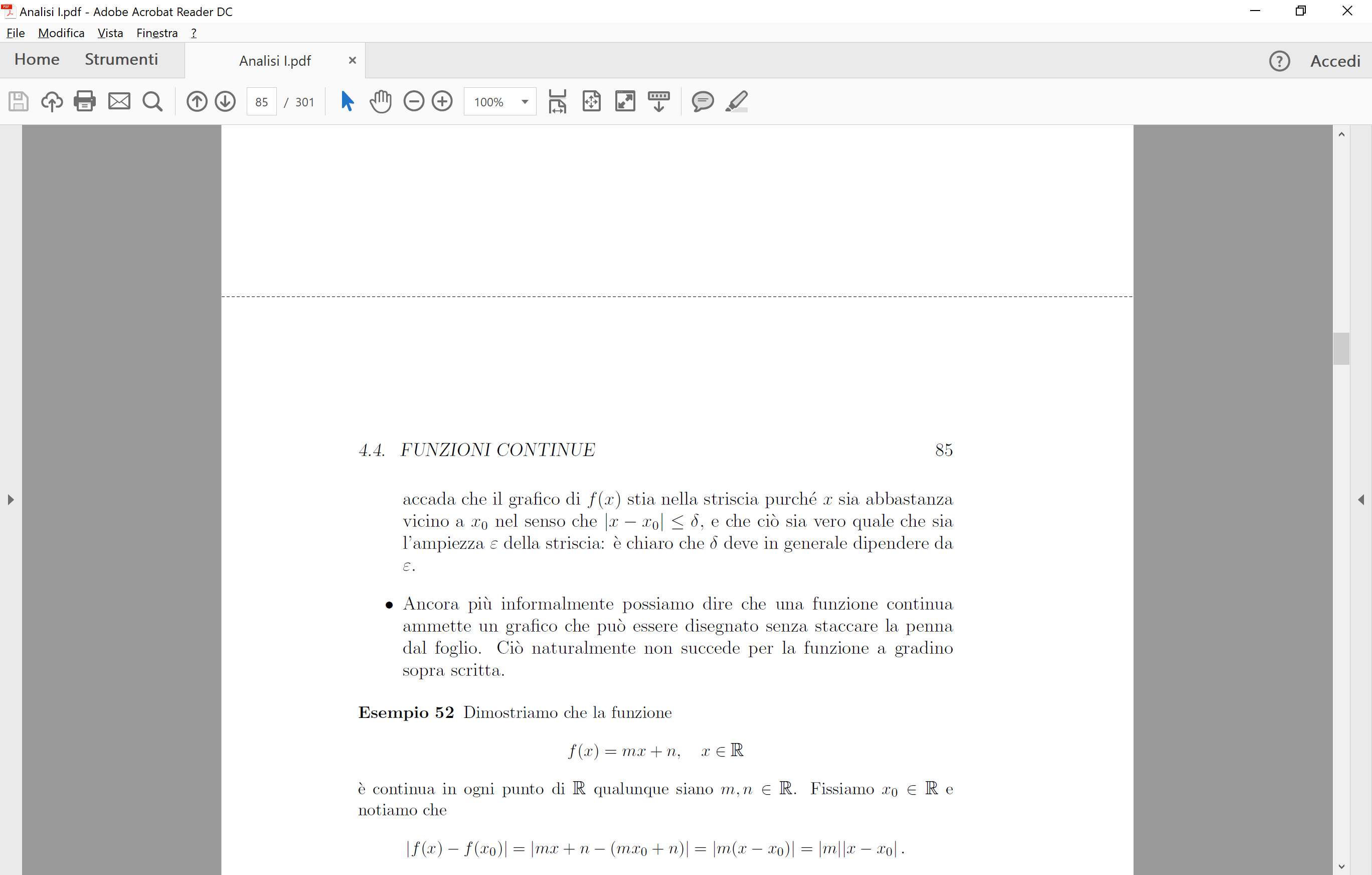
**Proposizione** Sia f : A ⊆ R → *f*(A) una funzione monotona strettamente crescente o strettamente decrescente. Allora f è invertibile.

**Definizione** Una funzione f : A ⊆ R → B ⊆ R si dice inferiormente limitata se la sua immagine è inferiormente limitata, cioè se esiste L ∈ R tale che *f*(x) ≥ L per ogni *x* ∈ A. Si dice superiormente limitata se la sua immagine è superiormente limitata, cioè se esiste M ∈ R tale che *f*(x) ≤ M per ogni *x* ∈ A. Si dice limitata se è sia inferiormente che superiormente limitata.



**FUNZIONE CONTINUA**





**Proprietà delle funzioni continue**

