Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 08/01/2008

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Siano

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} ,$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} .$$

a. Verificare che $H < GL_2(\mathbb{R})$.
b. Verificare che $K \lhd H$.
c. Dimostrare che $H/K \simeq \mathbb{R}^*$.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (2\ 3\ 9)(1\ 7\ 6\ 5) \in S_{10}$.
a. Determinare $o(\sigma)$. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_{10} tali che:

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (4\ 8\ 1\ 3)(2\ 6\ 10) ,$$

$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (3\ 2\ 6)(1\ 5\ 2\ 9) .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_{10} che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo con unità tale che $a^2 = a$ per ogni $a \in A$.
a. Verificare che $2a = 0$ per ogni $a \in A$.
b. Sia I un ideale di A. Dimostrare che I è primo se e solo se I è massimale.
c. Sia I un ideale primo di A. Dimostrare che $A/I \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $P = (X^2 - 5)(X^2 - 7) \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il grado del campo di spezzamento di P su $K = \mathbb{Q}$.
b. Trovare il campo di spezzamento di P su K per $K = \mathbb{F}_7$, $K = \mathbb{F}_3$ e $K = \mathbb{F}_{13}$.
c. Sia α una radice di $X^2 - 5$. Trovare l'ordine di $\alpha + 1$ in $\mathbb{F}_7(\alpha)^*$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 02/04/2008 - Appello riservato ai fuori corso

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia $n \geq 3$ un numero naturale e siano

$$H_1 = \{\, \sigma \in S_n \ t.c.\ \sigma(n) = n \} \ ,$$

$$H_2 = \{\, \sigma \in S_n \ t.c.\ \sigma(n) \neq 1 \} \ .$$

a. H_1 è un sottogruppo di S_n ?
b. H_2 è un sottogruppo di S_n ?
c. H_1 è un sottogruppo normale di S_n ?

Esercizio 2. Sia $G = (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$.
a. Verificare che $[2]_{11}$ genera $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$ e che $[2]_{13}$ genera $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$.
b. La coppia $([2]_{11}\, , [2]_{13}\,)$ genera G ?
c. Scrivere il gruppo abeliano G come prodotto diretto di gruppi ciclici di ordine potenza di un primo.

Esercizio 3. Sia $I = \{P \in \mathbb{Z}[X] \ t.c.\ P(0) \equiv 0 \pmod 3 \,\}$.
a. Verificare che I è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$.
b. Verificare che $I = (3, X)$.
c. Dimostrare che I è un ideale massimale di $\mathbb{Z}[X]$.

Esercizio 4. Sia $P = X^3 - 5X^2 + 2 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su K per $K = \mathbb{F}_2\, ,\ K = \mathbb{F}_3$ e $K = \mathbb{F}_5$.
b. $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ?
c. Sia α una radice di P. Trovare l'inverso di $\alpha + 1$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 17/06/2008 - Appello straordinario

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Siano

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^c \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ con } a, c \in \mathbb{Z} \right\} ,$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 2^a & b \\ 0 & 2^{-a} \end{pmatrix} \in H \right\} .$$

a. Verificare che $H < GL_2(\mathbb{R})$.
b. Verificare che $K \triangleleft H$.
c. Dimostrare che $H/K \simeq \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (1\ 3\ 7)(4\ 5\ 2\ 10) \in S_{10}$.
a. Determinare $o(\sigma)$. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_{10} tali che:

$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7) ,$$

$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (1\ 5\ 9)(10\ 2\ 5\ 8) .$$

c. Quanti e quali sono gli elementi di S_{10} che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia

$$I = \{a + b\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \ t.c.\ a \equiv 0 \pmod 7 \} .$$

a. Verificare che I è un ideale primo di $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
b. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/I \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $P = X^4 + 3X^3 - 15X^2 + 9X + 6 \in K[X]$ con K campo.
a. Con $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ?
b. Trovare il campo di spezzamento di P su K per $K = \mathbb{F}_2$ e $K = \mathbb{F}_5$.
c. Sia α una radice di P, trovare l'ordine di $\alpha + 1$ in $\mathbb{F}_5(\alpha)^*$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 14/07/2008

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia $G = Hom(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}\,,\, \mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$ il gruppo degli omomorfismi $\varphi : \mathbb{Z}/32\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ con l'operazione $(\varphi + \psi)([a]_{32}) = \varphi([a]_{32}) + \psi([a]_{32})$.
Sia $H = \{\varphi \in G \ t.c.\ \varphi([4]_{32}) = [0]_{16}\,\}$.
a. Verificare che $H \lhd G$.
b. Dimostrare che $G/H \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Sia G un gruppo abeliano di ordine 120.
a. Scrivere, a meno di isomorfismi, tutti i gruppi abeliani di ordine 120.
b. Per ognuno dei gruppi del punto **a** trovare il numero degli elementi di ordine 12.
c. Dire se i seguenti gruppi sono o no isomorfi tra loro

$$H_1 = (\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*\ ,\ H_2 = (\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*\ ,\ H_3 = \mathbb{Z}/40\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ ,$$

$$H_4 = (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*\ ,\ H_5 = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\ .$$

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo con unità e sia

$$Nil(A) = \{a \in A \ t.c.\ \exists n \in \mathbb{N}\ t.c.\ a^n = 0\,\}$$

l'ideale degli elementi nilpotenti.
a. Verificare che per ogni ideale primo P si ha $Nil(A) \subset P$.
b. Verificare che per ogni $a \in Nil(A)$ e per ogni $x \in A^*$ si ha $x + a \in A^*$.
c. $A/Nil(A)$ è un dominio di integrità ?

Esercizio 4. Sia $P = X^4 - 10 \in \mathbb{Q}[X]$.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su $\mathbb{Q}$ e calcolarne il grado.
b. Sia α una radice di P: trovare l'inverso di $\alpha^2 + 2$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 15/09/2008

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia G un gruppo tale che $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ per ogni $a, b \in G$.
a. Dimostrare che G è abeliano.
b. Fissiamo un $a \in G$ di ordine $n < \infty$ e sia $\varphi_k : G \to G$ definita da $\varphi_k(g) = a^k g$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Per quali n e k la mappa φ_k è un omomorfismo ?

Esercizio 2. Sia p un numero primo.
a. Verificare che il gruppo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ è ciclico.
b. Quanti e quali sono gli elementi di $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ di ordine 136 ?
c. Trovare il numero di elementi di ordine 136 nei seguenti gruppi

$$H_1 = \mathbb{Z}/68\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\ ,\ H_2 = \mathbb{Z}/272\mathbb{Z}\ ,\ H_3 = \mathbb{Z}/136\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ .$$

Esercizio 3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia $I_a = \{P(X) \in \mathbb{Q}[X]\, t.c.\, P(a) = 0\}$ un ideale di $\mathbb{Q}[X]$.
a. Trovare i generatori degli ideali I_2 , $I_{\sqrt{2}}$, $I_2 \bigcap I_{\sqrt{2}}$ e $I_2 + I_{\sqrt{2}}$.
b. L'insieme $I_2 \bigcup I_{\sqrt{2}}$ è un ideale di $\mathbb{Q}[X]$?

Esercizio 4. Sia $P = X^4 + 2X + 4 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su K per $K = \mathbb{F}_5$ e $K = \mathbb{F}_7$.
b. Per $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[X]/(P)$ è un campo ?
c. Sia $\alpha \notin \mathbb{F}_7$ una radice di P: trovare l'ordine di $\alpha + 2$ in $\mathbb{F}_7(\alpha)^*$.

Introduzione alla teoria dei gruppi, degli anelli e dei campi
Compito del 25/11/2008 - Riservato ai laureandi

COGNOME e NOME
MATRICOLA

Esercizio 1. Sia
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\} .$$
a. Dimostrare che H è un sottogruppo abeliano di $GL_2(\mathbb{R})$.
b. Dimostrare che $H \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia $\sigma = (1\ 2\ 4)(3\ 9\ 5\ 8) \in S_{10}$.
a. Determinare $o(\sigma)$. La permutazione σ è pari o dispari ?
b. Trovare, se esistono, permutazioni τ_1 e τ_2 in S_{10} tali che:
$$\tau_1 \sigma \tau_1^{-1} = (4\ 8\ 1\ 10)(2\ 6\ 5) ,$$
$$\tau_2 \sigma \tau_2^{-1} = (1\ 9)(1\ 7)(3\ 5\ 2\ 8) .$$
c. Quanti e quali sono gli elementi di S_{10} che commutano con σ ?

Esercizio 3. Sia $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C}\, t.c.\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.
a. Dimostrare che $I = \{a + ib \in \mathbb{Z}[i]\, t.c.\ a \equiv b \pmod 2\}$ è un ideale di $\mathbb{Z}[i]$.
b. Dimostrare che $\mathbb{Z}[i]/I \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia $P = X^4 + 13X^3 - 20X^2 + 23 \in K[X]$ con K campo.
a. Trovare il campo di spezzamento di P su K per $K = \mathbb{F}_7$ e $K = \mathbb{F}_{13}$.
b. Sia $\alpha \notin \mathbb{F}_7$ una radice di P: trovare l'ordine di $\alpha + 2$ in $\mathbb{F}_7(\alpha)^*$.