

Prova Scritta di Analisi Matematica IV

11 Luglio 2013

Esercizio 1.

Sia $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x; x^3 \leq y \leq 3\}$. Si valuti

$$\int_R x^2(y - x^3)e^{y+x^3} dx dy.$$

Esercizio 2.

Si calcoli la lunghezza della curva di equazione polare

$$\rho = \sin^2 \theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

Esercizio 3.

Si dica se la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \right) dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \right) dy$$

è esatta su $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$. Si calcoli, se esiste, una primitiva.

Esercizio 4.

Si calcoli l'integrale di superficie

$$\int_{\Sigma} \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}} d\sigma,$$

dove Σ è la parte di superficie $z = x^2 - y^2$ che si proietta su $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

(Hint: Si scriva $T = T_1 \setminus T_2$, con T_1, T_2 opportuni. Passando poi in coordinate polari...)

Esercizio 5.

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e siano $f, g \in \mathcal{C}^2(D)$. si dimostri che, se $f = 0 = g$ su ∂D , allora

$$\int_D f \Delta g dx dy = \int_D g \Delta f dx dy,$$

dove $\Delta \cdot := \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot$ è l'operatore di Laplace.