

Prova Scritta di Analisi Matematica IV

21 Giugno 2013

Esercizio 1.

Sia $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x \leq 2; 0 \leq xy \leq 2; 0 \leq z \leq 1\}$. Si valuti

$$\int_R x^2 + 3xyz \, dx dy dz.$$

Esercizio 2.

Calcolare l'area interna alla "goccia" $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita mediante

$$\gamma(t) = (2a \cos t - a \sin 2t, b \sin t),$$

dove $a, b > 0$.

(Hint: dalle formule di Gauss-Green...)

Esercizio 3.

Si dica se il campo vettoriale $F(x, y, z) = (z \cos(xz), e^y, x \cos(xz))$ é conservativo e, nel caso affermativo, se ne calcoli un potenziale.

Esercizio 4.

Sia $F(x, y, z) = (-y, x, xyz)$ e sia $G = \nabla \times F$. Sia S la parte della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ che giace sotto il piano $z = 4$ e orientata di modo che il versore normale ν sia uscente. Si calcoli

$$\int_S \langle G, \nu \rangle \, dS.$$

Esercizio 5.

Si calcolino i punti critici di $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$ sull'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.