

Introduzione.

...questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intendere la lingua e conoscere i caratteri, ne' quali è scritto: Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ad altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola...
(Galileo Galilei, Il saggiatore, 1623)

L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il sole occupa uno dei fuochi
(prima legge di Keplero, 1608)

Il corso di **“Geometria analitica e algebra lineare”** ha lo scopo di fornire alcuni degli attrezzi oggi ritenuti indispensabili per la lettura del mondo odierno ed in particolare per lavorare come matematici¹. Per esempio, gran parte del corso è motivata da questi problemi:

- 1) come si riconosce se un sistema di equazioni di primo grado, formato da molte equazioni in molte incognite (come accade nello studio di modelli matematici dell'economia) ha soluzioni? E si può prevedere quante ne ha, senza calcolarle?
- 2) Come si capisce se una equazione di secondo grado in due incognite può identificare proprio l'orbita di un pianeta?

Per rispondere a queste domande in modo esauriente terremo conto dello sviluppo goduto dall'Algebra e dalla Geometria negli ultimi secoli; utilizzeremo la sistemazione attuale di queste discipline, rimandando al corso di Storia della matematica lo studio della loro evoluzione.

Inquadreremo il primo problema nell'ambito della teoria degli spazi vettoriali e delle applicazioni tra di essi; il secondo troverà risposta completa alla fine del corso, con la teoria degli autovettori.

Programma sintetico del corso.

1. Richiami su insiemi e funzioni. Vettori geometrici Equazioni vettoriali e parametriche di rette e di piani.
2. Sistemi lineari: il problema della compatibilità. Il metodo di eliminazione di Gauss. Sistemi quadrati con matrice non singolare.
3. Spazi vettoriali. Sottospazi vettoriali. Basi, dimensione. Intersezione e somma di sottospazi; teorema di Grassmann. Somma diretta.
4. Applicazioni lineari. Nucleo e Immagine di un'applicazione lineare. Rango o dimensione dell'immagine; teorema delle dimensioni e sue conseguenze. Il teorema di Rouché-Capelli. Sottospazi affini, giacitura, relazione di parallelismo tra sottospazi affini, equazioni parametriche e equazioni cartesiane di sottospazi affini.
5. Spazi vettoriali di applicazioni lineari. Spazio duale. Applicazioni lineari invertibili. Spazi vettoriali isomorfi. Composizione di applicazioni e prodotto di matrici. Matrici invertibili, loro caratterizzazione. Matrice di un cambiamento di base. Matrici simili. Determinanti.
6. Equazioni cartesiane di rette nel piano; di piani e di rette nello spazio. Condizioni di parallelismo tra rette, tra piani, tra retta e piano. Uso dei determinanti in geometria analitica: Sistemi di coordinate affini, cambiamenti di coordinate affini.
7. Coseno dell'angolo convesso tra due vettori nel piano, prodotto scalare nel piano. Il prodotto scalare standard in \mathbb{R}^n . Spazi con prodotti scalari, spazi vettoriali metrici. Basi ortogonali, basi ortonormali. Supplemento ortogonale di un sottospazio. Isometrie e matrici ortogonali.
8. Equazione del piano per un punto perpendicolare ad una data retta, proiezione ortogonale di un punto su una retta, su un piano, distanza di un punto da una retta, da un piano; piani orientati, angolo di piani orientati, angolo tra retta e piano orientati. Uso del prodotto scalare per calcolare la distanza di un punto da un piano; problemi su distanze e angoli nel piano euclideo. Prodotto vettoriale, prodotto misto, volume del parallelepipedo.
9. Autovettori e autovalori di un endomorfismo. Autospazi. Basi di autovettori, endomorfismi diagonalizzabili. Il polinomio caratteristico. Criterio di diagonalizzabilità.
10. Equazioni di luoghi di punti nel piano, definizioni classiche di ellissi, iperboli, parabole. Curve di secondo ordine nel piano affine reale. Invarianti affini e invarianti metrici delle curve di secondo ordine. Il teorema spettrale (senza dimostrazione), suo uso nella classificazione delle coniche. Classificazione metrica e classificazione affine delle coniche. Centro, assi, asintoti. Cenni alla classificazione metrica delle quadriche,

¹ <http://mestieri.dima.unige.it/>

sezioni di una quadrica con un piano. Sfere, cilindri, coni, quadriche rigate. Coordinate polari, coordinate cilindriche, coordinate sferiche.

Testi.

Il testo di riferimento principale è

Marco Abate – Chiara de Fabritiis, *Geometria analitica con elementi di algebra lineare*, McGraw-Hill, Milano, seconda edizione 2010.

Gli argomenti trattati nel corso si trovano in qualunque manuale universitario di geometria analitica e algebra lineare, ad esempio:

Marco Abate, *Geometria*, McGraw-Hill, Milano, 1996.

Enrico Schlesinger, *Algebra lineare e geometria*, Zanichelli, Bologna, 2011

Giovannina Albano, *La prova scritta di Geometria tra teoria e pratica*, CUES, Salerno, 2011

Organizzazione didattica.

Come non è un musicista chiunque ascolti canzoni, così non si è matematici se non ci si lavora, in prima persona. Pertanto

- ✓ questo corso prevede, come attività in aula, oltre alle lezioni “cattedratiche”, la discussione di esercizi e di problemi;
- ✓ come sussidio per tali attività di studio viene utilizzato il supporto della piattaforma di e-learning Moodle, che si raggiunge cliccando sull'icona  nel sito <http://phi.unical.it:8280/home>. Ogni studente iscritto al primo anno del corso di laurea in Matematica accede al corso sulla piattaforma tramite il proprio codice fiscale ed il pin relativo alla sua posta elettronica istituzionale. Gli studenti di altri anni di corso devono rivolgersi all'amministratrice della piattaforma dott. M. Caria all'indirizzo m.caria@unical.it
- ✓ Nella piattaforma lo studente troverà, per ogni argomento trattato nel corso
 - eventuali documenti integrativi, riferimenti bibliografici e links
 - **avvisi** (alla voce **FORUM NEWS**)
 - brevi **QUIZ**, per autoverifica dell'apprendimento
 - i **COMPITI A CASA**, da svolgere preferibilmente in gruppo e *on line*
 - le soluzioni corrette dei compiti a casa, scelte tra quelle inviate o consegnate dagli studenti
 - il **FORUM** in cui ciascuno può porre domande, intervenire su questioni legate al corso, eccetera
 - brevi sondaggi, sulla valutazione delle attività da parte degli studenti.
- ✓ Circa **a metà corso**, verrà svolta in aula una prova scritta, riguardante gli argomenti trattati fino a quel momento; il compito verrà ritirato, corretto e discusso. Questa prova “intermedia” è uno strumento di autovalutazione - per gli studenti e per il docente - e di allenamento per l'esame finale.
- ✓ Un giudizio di piena sufficienza (maggiore o uguale a 25/30) nella prova intermedia produce un aumento di due punti nel voto finale dell'esame; per un voto superiore a 17 e inferiore a 25 si guadagna un punto.
- ✓ M. D'Aprile riceve nel suo studio nell'edificio 31B, sesto piano (livello ponte carrabile) nell'orario pubblicato nella pagina del corso oppure per appuntamento: tel. 0984/496452, posta elettronica m.daprile@unical.it ; pagina web <https://www.mat.unical.it/~daprile/> .

Esame.

L'esame consiste di due prove, una scritta e una orale, sugli argomenti effettivamente svolti nelle lezioni.

La prova scritta dura tre ore. Durante la prova scritta, è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali. Non è consentito ritirarsi o uscire prima che sia trascorsa una ora e mezza dell'inizio della prova.

Gli esercizi dell'esame devono essere svolti in modo completo, accompagnati da motivazioni e spiegazioni, anche succinte, purché leggibili. Non viene dato nessun valore a un risultato, anche corretto, che non sia giustificato.

Si è ammessi alla prova orale se il voto della prova scritta è non inferiore ad un certo minimo (ordinariamente 14). E' **obbligatoria l'iscrizione all'esame** per via elettronica, nel sito all'indirizzo <https://didattica.unical.it/> .

M. D'Aprile
1 ottobre 2012