Esempio di soluzione

di una delle versioni del compito di Geometria analitica e algebra lineare del 12 luglio 2013

1. Stabilire se la retta *r*, di equazioni parametriche $x = -1, y = 1 + t, z = -t$ (nel parametro reale *t*), è sghemba o complanare con la retta *r'*, di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$. In ogni caso, determinare la distanza tra *r* ed *r'*.

(punti 2 + 3)

La retta r ha parametri direttori $(0,1,-1)$.
Ponendo $z = s$, *dalle equazioni cartesiane di r' si ricavano le equazioni parametriche* $x = 0, y = -s, z = s$, *da cui risulta che r' ha la stessa direzione di r e non ha punti in comune con essa (altrimenti, per l'ascissa del punto comune dovrebbe essere* $-1 = 0$!!!*). Dunque r ed r' sono parallele, e perciò esiste un piano che le contiene tutte e due.*
La distanza tra due rette parallele è la distanza di un punto qualsiasi dell'una dalla sua proiezione ortogonale sull'altra. In questo caso, possiamo calcolarla come la distanza di O $= (0,0,0)$, *che sta su r', da O' (proiezione ortogonale di O su r) che è il punto in cui r è tagliata dal piano perpendicolare alle due rette, passante per O:*

$$y - z = 0 .$$

O' ha le coordinate $(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *e quindi la distanza tra r, r' è* $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. Scrivere un'equazione cartesiana del piano che passa per la retta *r*, di equazioni parametriche, nel parametro reale *t*, $x = -1, y = 1 + t, z = -t$, ed è parallelo alla retta *s*, di equazioni $\begin{cases} x + y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$.

(punti 3)

La retta r ha direzione $(0,-1,1)$, *la retta s ha la direzione* $(1,-1,0)$. *Il piano cercato passa per un punto di r (ad esempio,* $(-1,1,0)$*) ed ha giacitura individuata dalle direzioni delle due rette; la sua equazione cartesiana è*

$$\det\begin{pmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z & -1 & 0 \end{pmatrix} = (x+1)(-1) + (-1)(y-1) - z = -x - y - z = 0.$$

Allo stesso risultato si può arrivare cercando, tra i piani del fascio che ha per sostegno r

$$\lambda(x+1) + \mu(y + z - 1) = 0$$

quello che è parallelo a s, per il quale deve aversi $\lambda(1) + \mu(-1) = 0$, *cioè* $\lambda = \mu$.

3. a) Scrivere un'equazione cartesiana della sfera S con centro in (0,–1,0) e passa per (–1,–1,0) e delle equazioni cartesiane della curva C che è intersezione di S col piano π di equazione $y = -1$.
b) Scrivere delle equazioni parametriche di C.

c) Per ogni punto P di C, si consideri la retta g che è perpendicolare al piano π e che passa per P. Scrivere delle equazioni parametriche delle rette g e ricavarne delle equazioni parametriche ed un'equazione cartesiana della superficie generata da queste rette.

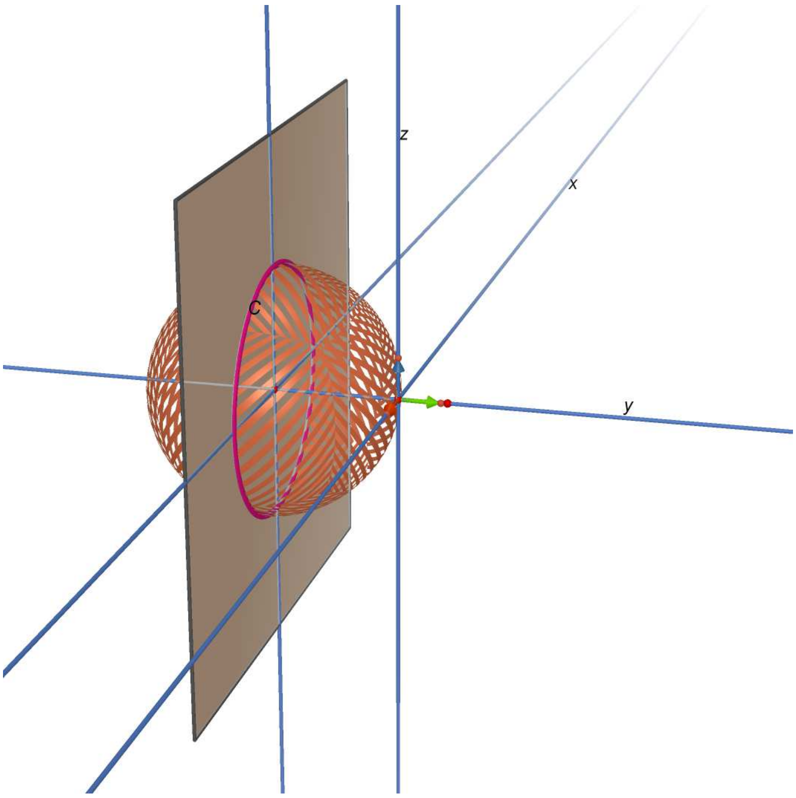
(punti 2 + 2 + 3)

a) Il raggio della sfera è la distanza tra il centro $(0,-1,0)$ *e il punto* $(-1,-1,0)$*, quindi la superficie S ha equazione* $x^2+(y+1)^2+z^2=(-1)^2$.

Le equazioni cartesiane di C sono $\begin{cases} x^2+(y+1)^2+z^2=1 \\ y+1=0 \end{cases}$.

b) L'intersezione di una superficie sferica con un piano che passa per il suo centro è una circonferenza massima, perciò C è la circonferenza di raggio uguale a 1*, con centro* (0,–1,0)*, situata nel piano che passa per* (0,–1,0) *ed è parallelo al piano delle x, z.*
Le equazioni parametriche di C sono

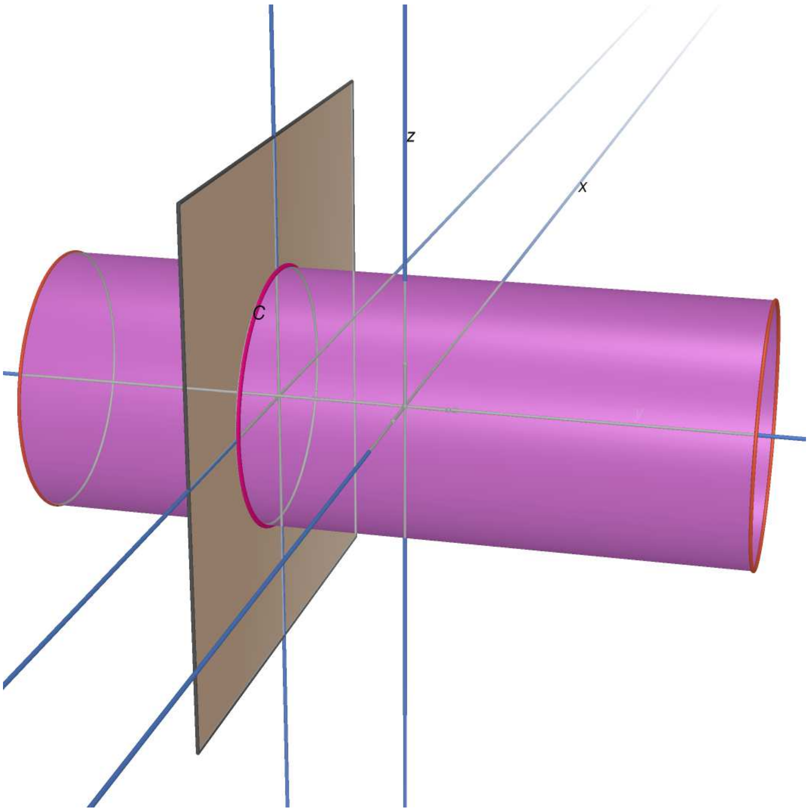
$$\begin{cases} x=\cos\alpha \\ y=-1 \quad ,\alpha\in\mathbb{R} \\ z=\sin\alpha \end{cases}.$$



c) Le perpendicolari al piano di C hanno la direzione dell'asse delle y, quindi le equazioni parametriche delle rette g sono $\begin{cases} x=\cos\alpha \\ y=-1+t\,, t\in\mathbb{R}. \\ z=\sin\alpha \end{cases}$

Al variare di α *e di* t*, queste equazioni descrivono i punti del cilindro circolare generato dalle rette g. Dalle equazioni parametriche si ricava l'equazione cartesiana del cilindro*

$$x^2 + z^2 = 1.$$



4. In $\mathbb{R}^4$, si consideri il sottospazio **U** generato dai vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Trovare, specificandone una base, un sottospazio **W** che sia supplementare di **U.**

(punti 4)

La matrice $(\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w})$ *ha rango uguale a 2, quindi 2 è la dimensione del sottospazio* **U.** *Ogni suo supplementare ha dimensione 2 ; è un sottospazio generato da due vettori che siano linearmente indipendenti dai vettori* **u, v**, *che formano una base di* **U.** *Ad esempio , dopo aver verificato che è*

$$rango(\mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_4 \quad \mathbf{u} \quad \mathbf{v}) = 4$$

si può scegliere $\mathbf{W} = Span(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4)$.

5. Sia L l'applicazione da $\mathbb{R}^4$ ad $\mathbb{R}$ così definita: $L:(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \sum_{i=1}^{4} x_i$.

a) Dimostrare che L è lineare.
b) Scrivere la matrice associata ad L rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}$.
c) Dimostrare che L è surgettiva.
d) Determinare una base del sottospazio Ker$L$ (nucleo di L).

(punti: 5)

a)

$$L(x_1+y_1,....,x_4+y_4)=\sum_{i=1}^{4}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{4}x_i+\sum_{i=1}^{4}y_i=L(\mathbf{x})+L(\mathbf{y})$$

$$L(\alpha\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{4}\alpha x_i=\alpha\sum_{i=1}^{4}x_i=\alpha L(\mathbf{x})$$

b) La matrice associata ad un'applicazione lineare da uno spazio quadridimensionale ad uno spazio di dimensione 1 è di tipo (1,4). In questo caso, poiché ogni vettore della base canonica di $\mathbb{R}^4$ ha come immagine 1, la matrice associata all'applicazione L è

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Infatti: $\mathbf{A}\begin{pmatrix}x_1\\ \cdot\\ \cdot\\ x_4\end{pmatrix}=x_1+....+x_4.$

c) Per ogni numero reale h *esiste qualche vettore* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4$ *per quale è* $L(\mathbf{x})=h$ *; infatti, scelto*

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}h & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \textit{si ha}\ L(\mathbf{x})=h.$$

d) Il nucleo di L è il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ *delle soluzioni dell'equazione* $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. *Si ha perciò*

$$\ker L=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4\mid x_1=\lambda, x_2=\mu, x_3=\nu, x_4=-\lambda-\mu-\nu,\ per\ \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}\}.$$

Una base del nucleo è la famiglia

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Per controllare la coerenza tra le risposte d),c), usando il teorema delle dimensioni, verifichiamo che, da dim(KerL) = 3, segue: dim(ImL) = 4 - 3 = 1, e quindi è confermato che l'applicazione è surgettiva.

6. Stabilire per quali scelte di h la matrice reale $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & -h & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 2h & 1\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile e, per quei valori di h, scrivere la matrice **M** di un cambiamento di base che porti **C** in forma diagonale.

(punti 4 + 2)

Scriviamo l'equazione caratteristica della matrice data

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & -h & 1\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ 2 & 2h & 1-\lambda\end{pmatrix}=(-1-\lambda)\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(-1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0.$$

Gli autovalori sono -1 *(con molteplicità algebrica 2) e* 2 *, semplice.*

Perché la matrice sia diagonalizzabile, è necessario che l'autospazio relativo all'autovalore doppio sia di dimensione 2. Lo spazio degli autovettori associati all'autovalore doppio è dato dalle soluzioni di

$$(\mathbf{C}-(-1)\mathbf{I})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & -h & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 2h & 2\end{pmatrix}\mathbf{X}=\mathbf{0}$$

Questo sistema omogeneo (in tre incognite) ha ∞^2 soluzioni se il rango della matrice dei coefficienti è 1. Dalla riduzione a scalini

$$\begin{pmatrix}1 & -h & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 2h & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -h & 1\\ 0 & 4h & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

si ricava che il rango è 1 soltanto per $h = 0$; *quindi la matrice è diagonalizzabile solamente per* $h = 0$.

In tale caso, l'autospazio associato all'autovalore doppio ha come base la famiglia $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$*; l'autospazio relativo all'autovalore semplice è determinato da*

$$(\mathbf{C}(0)-(2)\mathbf{I})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\mathbf{X}=\mathbf{0}$$

quindi è il sottospazio generato dal vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Una matrice di un cambiamento di base da cui si ottenga una matrice, simile a **C**, *in forma diagonale, è*

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$