18. I teoremi di Desargues sul quadrangolo. Prospettività.

Vedere [Testo] n. 4.2, 4.3, per gli argomenti della lezione del 12 novembre 2007
- La proiezione conserva il birapporto di quattro punti allineati
- Quadrangoli e gruppi armonici.
- Teorema di Desargues sulle involuzioni.
- Cenno alla caratterizzazione delle proiettività del piano reale come bigezioni che conservino l'allineamento
- Prospettività tra rette come proiettività tra rette in cui il punto comune è unito.

19. Proiettività tra rette come prodotto di prospettività; teoremi di Pappo e dei triangoli prospettivi.

Vedere [Testo] n. 4.3, omettendo la parte 4) della proposizione 4.3.2, e 4.4 per gli argomenti della lezione del 13 novembre 2007:
- Asse di collineazione, teorema di Pappo
- Triangoli prospettivi rispetto a un punto, rispetto a una retta

20. Il teorema dei triangoli prospettivi. Punti e rette unite.

Vedere [Testo] 4.4, 4.5 e anche gli appunti qui sotto per gli argomenti della lezione del 14 novembre 2007:
- Il teorema di Desargues sui triangoli prospettivi.
- Punti uniti e rette unite in una proiettività del piano.

Osservazioni sulla classificazione delle proiettività del piano reale.

In analogia con il caso delle proiettività di $\mathbb{P}^1$, anche per le proiettività di $\mathbb{P}^2$ su se stesso la ricerca dei punti uniti conduce alla determinazione degli autovalori delle matrici associate.
Matrici che rappresentano una stessa proiettività in sistemi di coordinate diversi sono tra loro simili; come è noto dal corso di Algebra lineare, matrici *simili* hanno gli stessi autovalori. Gli autovalori della matrice associata ad una proiettività esprimono dunque dei caratteri geometrici della proiettività (indipendenti dalla particolare matrice che rappresenta la proiettività).

Se una proiettività φ: $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, tiene uniti due punti distinti P, Q, allora φ tiene unita anche la retta r di P e Q**:** infatti, $\varphi(r)$ contiene $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$. La ricerca dei punti uniti conduce quindi anche alla considerazione dei sottospazi che vengono applicati da φ su se stessi; nel testo di riferimento del corso questo argomento è trattato ampiamente per il caso generale delle proiettività di $\mathbb{P}^n$ (nel capitolo 3). Il caso del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2$ è più semplice del caso generale perché c'è un solo tipo di sottospazio proprio di dimensione positiva, quello di dimensione uno, la retta.
Ricordiamo che se una proiettività φ ha equazione

$$\rho\mathbf{X}' = \mathbf{AX}\,,$$

la sua proiettività duale φ^* è data da

$$\rho\mathbf{U}' = \mathbf{A}^{-1\mathbf{T}}\mathbf{U}\,.$$

La ricerca delle rette che vengono trasformate da φ su stesse si traduce nella ricerca dei punti uniti di φ^*, o il che è lo stesso, di φ^{*-1}, che è associata alla matrice $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$**.** E' utile il

Lemma: *le matrici* **A** *e* $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ *hanno gli stessi autovalori.*
Per **dimostrare** il lemma nel caso di matrici del terzo ordine, basta calcolare l'equazione caratteristica della matrice **A**; indicati come al solito con $\mathbf{A}_{ik}$ il complemento algebrico dell'elemento a_{ik} della matrice, e con $tr(\mathbf{A})$ la sua traccia, si trova

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + \lambda^2 tr(\mathbf{A}) - \lambda(\sum_{i=1}^{3}\mathbf{A}_{ii}) + \det\mathbf{A}\cdot$$

Poiché $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ e **A** hanno la stessa traccia, gli stessi complementi algebrici degli elementi delle diagonale e lo stesso determinante, si conclude che le loro equazioni caratteristiche coincidono. C.v.d.

Possiamo quindi utilizzare i dati sugli autovalori di una proiettività per ragionare sia sui suoi punti uniti che sulle sue rette unite.

21. Classificazione delle proiettività piane reali. Omologia piana.

Vedere [Testo] 4.5, l'inizio di 4.6 includendo solo la prop. 4.6.1, e anche gli appunti qui sotto per gli argomenti della lezione del 15 novembre 2007.

Esaminando i casi possibili di molteplicità delle radici dell'equazione caratteristica e di soluzioni del problema degli autospazi di una matrice reale, di ordine tre, non degenere, si ricava la classificazione riassunta nella tabella che segue.

Autovalori della matrice associata	**Molteplicità algebrica**	**Molteplicità geometrica**	**Punti uniti**	**Matrice della forma canonica**	**Rette unite**
$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_2 \neq \lambda_3, \lambda_3 \neq \lambda_1$ tutti reali	1, per ogni autovalore	1, per ogni autovalore	Tre distinti, non allineati	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$	Tre distinte, non appartenenti a un fascio
λ_1 reale, λ_2 e λ_3 complessi coniugati	1	1	Uno solo	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & h\cos\theta & \pm h\sin\theta \\ 0 & h\sin\theta & \mp h\cos\theta \end{pmatrix}$	Una sola. Su di essa è indotta una proiettività ellittica
$\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu \neq \lambda_1$	2 per λ_1 1 per μ	1 per ogni autovalore	Due punti distinti	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$	Due rette distinte
		Uguale alla molteplicità algebrica: **omologia**	Infiniti punti di una retta, **asse dell'omologia**; un punto non dell'asse, detto **centro**	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$	Infinite rette passanti per il centro dell'omologia, una retta (l'asse) non passante per il centro
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	3	1	Un solo punto	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	Una sola retta unita
		2 **omologia speciale**	Infiniti punti allineati sull'**asse dell'omologia speciale**	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	Infinite rette di un fascio, passanti per un punto che sta sull'asse ed è detto **centro dell'omologia**
		3 **identità**	**tutti**	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$	**tutte**

Un'omologia piana è dunque una proiettività piana in cui sono uniti tutti i punti di una retta (asse) e tutte le rette di un fascio (centro); se il centro del fascio appartiene all'asse, l'omologia è detta **speciale.**
Ci occupiamo ora della **omologie piane non speciali.** Per le omologie speciali valgono proprietà analoghe.

Lemma: sia ω: $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ una proiettività in cui sono uniti tutti i punti di una retta a (asse) ed un punto C fuori di essa (centro), allora:

1. per ogni punto P diverso da C e fuori dell'asse, i punti C, P, $\omega(P)$ sono allineati,
2. per ogni retta r passante per C, $\omega(r)=r$
3. per ogni retta s che sia diversa da a e non passi per C , s e la retta corrispondente $\omega(s)$ si incontrano sull'asse.

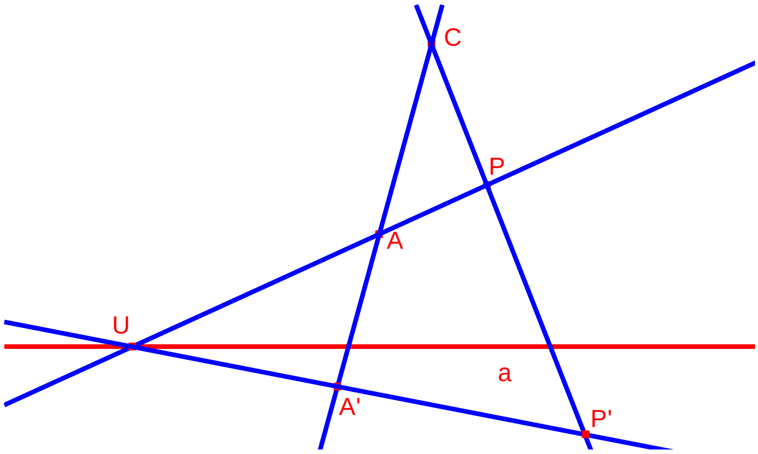
Dimostrazione. (1 e 2) Per ogni punto P diverso dal centro C e fuori dell'asse, la retta r dei due punti C, P incontra l'asse in un punto U. Poiché ω manda la retta r nella retta che contiene $\omega(C)$ ed $\omega(U)$, e C e U sono uniti, ω manda r quindi in se stessa, e dunque $\omega(P)$ sta su r.

(3) Analogamente, una retta *s* determinata da due punti *P, Q*, non uniti, incontra l'asse in un punto *W*; la retta sua immagine ω(*s*) passa per ω(*W*) che coincide con *W*. C.v.d.

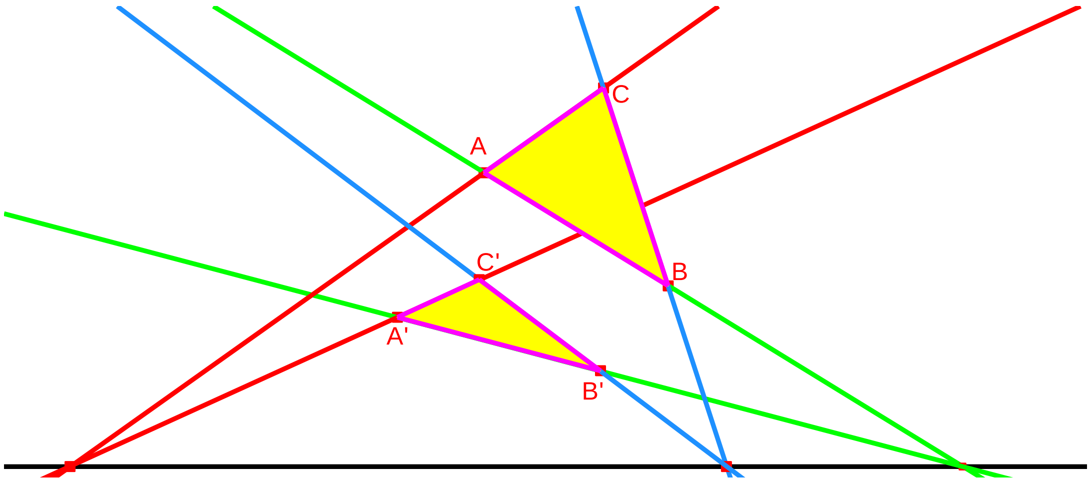
Teorema: *un'omologia piana non speciale è completamente individuata se sono dati*

1. *il centro, l'asse ed una coppia di punti corrispondenti (allineati con il centro),* oppure
2. *il centro, l'asse ed una coppia di rette corrispondenti (che si incontrano sull'asse),* oppure
3. *l'asse a, due punti distinti A, B ed i loro corrispondenti* $\omega(A)$, $\omega(B)$, *in modo che la retta di A e B intersechi a nello stesso punto in cui lo interseca la retta di* $\omega(A)$, $\omega(B)$.

Dimostrazione. 1. Siano assegnati il centro *C*, l'asse *a* ed una coppia di punti *A, A'* allineati con *C* ed entrambi fuori di *a*. Preso un punto *P* qualsiasi fuori ([1]) dalla retta congiungente *C* ed *A* , il suo corrispondente *P'* deve trovarsi sulla retta di *C* e *P* (per il punto 1 del lemma). Inoltre, detto *U* il punto in cui la retta *AP* incontra l'asse *a* , *P'* si trova sulla retta che passa per *A'* e per *U* (per il punto 3 del lemma); quindi *P'* è l'intersezione delle rette r_{CP} e $r_{A'U}$.



2. Analoga alla precedente.
3. L'intersezione della rette di *A*, $A'=\omega(A)$, con la retta di *B*, $B'=\omega(B)$ è il centro dell'omologia. Non è necessario però ricorrere al centro per costruire il corrispondente di un punto *C* non allineato con *A, A'* o con *B* e *B'*: basta osservare che la rette per *A* e per *C* incontra sull'asse la sua corrispondente, passante per *A'*; e analogamente la retta per *B* e *C* incontra la sua corrispondente sull'asse. I due triangoli *ABC, A'B'C'* sono prospettivi rispetto ad *a* (si ricordi il teorema di Desargues).
C.v.d.

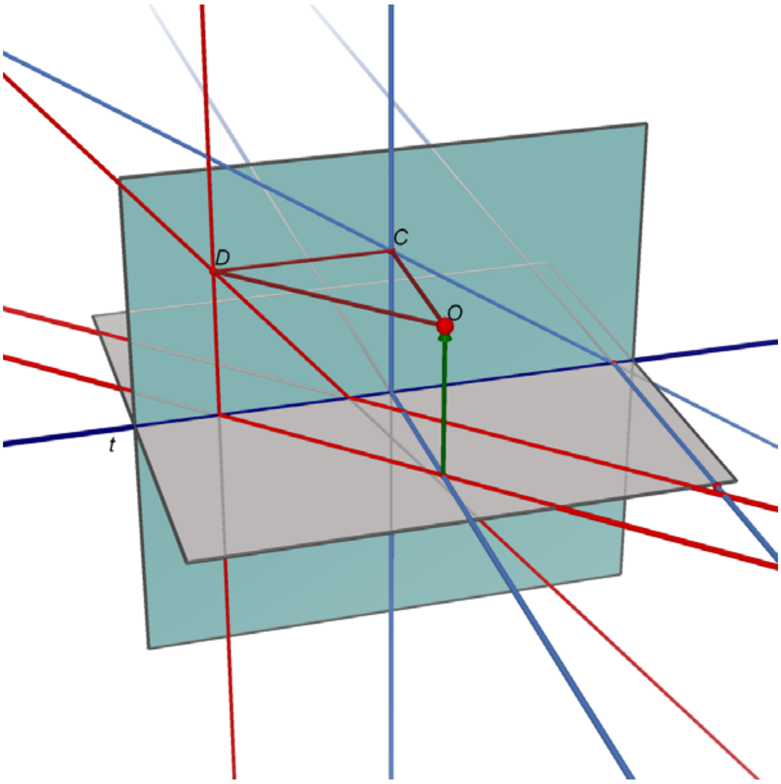


L'enunciato 3) spiega la tecnica insegnata da Piero della Francesca per disegnare sul quadro l'immagine di un pavimento.

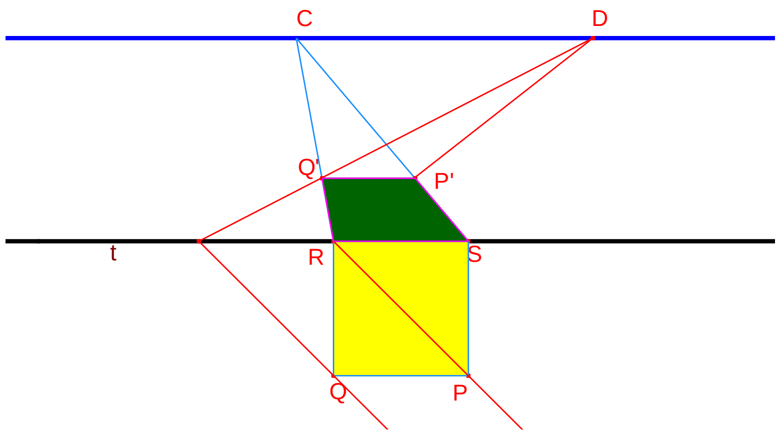
[1] E se *P* stesse sulla retta di *C* ed *A* ?

Si immagina che il piano del pavimento e il piano del quadro si intersechino nella “linea di terra”; si fa ruotare il piano “reale” (che si vuole dipingere) attorno alla linea di terra *t*, fino a farlo sovrapporre al quadro, in modo da considerare la corrispondenza tra i punti reali e punti dipinti come una proiettività di un piano su se stesso, in cui tutti i punti della retta *t* sono uniti, cioè una omologia di asse *t* .
Ricordiamo che la proiezione da un punto fuori dei due piani manda le direzioni delle rette del pavimento nei punti di una retta (la retta limite) parallela a *t*. Dati l’occhio *O* dell’osservatore ed il quadro, sono determinati sul quadro due punti: il primo, *C* (punto principale, o punto centrico, o punto di fuga), è l’immagine del punto improprio della direzione perpendicolare a *t*; la sua distanza da *t* è l’altezza dell’osservatore. Il secondo punto, *D* (punto di distanza), è l’immagine di una direzione a 45° con *t*. La retta dei due punti *C,D*, è parallela a *t* e la misura del segmento *CD* è uguale alla distanza dell’osservatore dal quadro, perché il triangolo *OCD* è rettangolo isoscele.
Il corollario b) permette di costruire l’immagine *P’* di un qualsiasi punto *P* (del semipiano inferiore, ai fini del disegno) nell’omologia di asse *t* in cui il punto improprio delle rette perpendicolari a *t* va in *C* e un altro punto improprio scelto va in *D: basta mandare da P la perpendicolare a t e la retta inclinata a 45°, poi congiungere i punti in cui queste incontrano t rispettivamente con C e con D; l’intersezione delle due ultime rette è P’.*

Nella figura, sono segnate nel piano orizzontale due rette (blu) perpendicolari a *t* e due rette (rosse) inclinate di 45° rispetto a *t* , e sul quadro le loro proiezioni da O.



Ecco come Piero della Francesca costruisce l’immagine del quadrato *PQRS* che ha il lato *RS* sulla linea di terra.



Esercizi sul quadrangolo piano completo, prospettività, punti uniti di una proiettività piana.

1. Su un foglio è disegnata una retta, e su di essa sono dati tre punti *A,B,C*. Usando soltanto una matita e una riga, trovare il quarto armonico dopo *A,B,C.*

2. Nel piano affine, è assegnato un quadrangolo *ABCD*, con triangolo diagonale *LMN*, con $L=r_{AB} \cap r_{CD}$; $M = r_{AD} \cap r_{BC}$, $N = r_{AC} \cap r_{BD}$, **tale** che la retta r_{AC} sia parallela alla retta r_{LM}. . Sia $X = r_{BD} \cap r_{LM}$. In che relazione (significativa dal punto di vista affine) stanno i punti *X, L, M* ?

3. Nel piano affine, è dato un trapezio *ABCD* (con *AB* parallelo a *CD*) e il punto *E* comune alle sue diagonali *AC, BD.* Usare il teorema sui quadrangoli piani completi per dimostrare che le intersezioni dei lati del trapezio con la retta per *E* parallela ad *AB* sono punti simmetrici rispetto ad *E* .

4. Dedurre dai teoremi sul quadrangolo piano completo la seguente proprietà dei quadrangoli affini (nota dalla geometria elementare): *se in un quadrangolo due coppie di lati opposte sono formate da rette parallele, allora l'unico punto diagonale al finito del quadrangolo è il punto medio tra due vertici non consecutivi.* (Suggerimenti: può essere utile un risultato intermedio, analogo a quello dell'esercizio precedente; proiettando da un punto all'infinito una retta su un'altra, il punto improprio di una retta nel punto improprio dell'altra)

5. Assegnare una involuzione su una retta fissando due coppie di punti corrispondenti e costruire graficamente il corrispondente di un punto qualunque della retta.

6. Usando la dualità in $\mathbb{P}^2$, definire come "prospettività tra due fasci di rette" (contenuti in $\mathbb{P}^2$) l'applicazione duale della prospettività tra due rette (contenute in $\mathbb{P}^2$) e dimostrare: *condizione necessaria e sufficiente perché una proiettività tra due fasci di rette distinti sia una prospettività è che la retta comune ai due fasci sia unita.*

7. Disegnare due rette *r, s* distinte ed assegnare tre punti *A, B, C* su *r*, tre punti *A', B', C'* su *s.* Scelto a piacere un punto *X* su *r*, costruire graficamente il corrispondente di *X* nella proiettività φ: $r \to s$ che manda ordinatamente *A, B, C* in *A', B, C'.*

8. Costruire graficamente il corrispondente di un punto *X* nella proiettività di una retta *r* su se stessa definita dalle condizioni che tre punti fissati e distinti *A, B, C* vadano in tre punti distinti $A' = A$, $B' \neq B$, $C' \neq C$.

9. Dimostrare che se nel piano affine sono assegnate due rette distinte *r, s* , e su *r* sono fissati tre punti distinti *A,B,C,* e su *s* sono dati dei punti *A',B',C'* tali che la retta *AB'* sia parallela alla retta *A'B* e la retta *BC*' sia parallela alla retta *B'C,* allora la retta *CA'* è parallela alla retta *C'A.*

10. Dimostrare analiticamente la proprietà armonica del quadrangolo piano completo prendendo i vertici del quadrangolo come punti fondamentali e punto unità del sistema di riferimento proiettivo.

11. Dimostrare, senza usare la geometria elementare, che, date nel piano affine tre rette *AA', BB', CC'* concorrenti in un punto *O*, se *AB* è parallela ad *A'B'* e *BC* è parallela a *B'C'* allora anche *AC* è parallela ad *A'C'* .

12. Data la proiettività θ del piano proiettivo reale associata alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dimostrare che la proiettività

    $\tilde{\theta}$ indotta da θ tra la retta r_1 che congiunge i punti base A_1, A_3 del sistema di riferimento e la sua immagine $\theta(r_1)$ è una prospettività; trovarne il centro e scriverne delle equazioni. Trovare punti uniti e rette unite di θ.

13. Studiare la proiettività associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinandone i punti uniti e le rette unite.

14. Verificare che la proiettività determinata dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ è un'omologia, e trovarne il centro, l'asse e la caratteristica.