

6. Coordinate cartesiane omogenee nel piano, equazione omogenea della retta.

E' noto che se nel piano si fissa un sistema di riferimento cartesiano, si stabilisce una corrispondenza bigettiva tra punti del piano e coppie ordinate (x,y) di numeri reali.

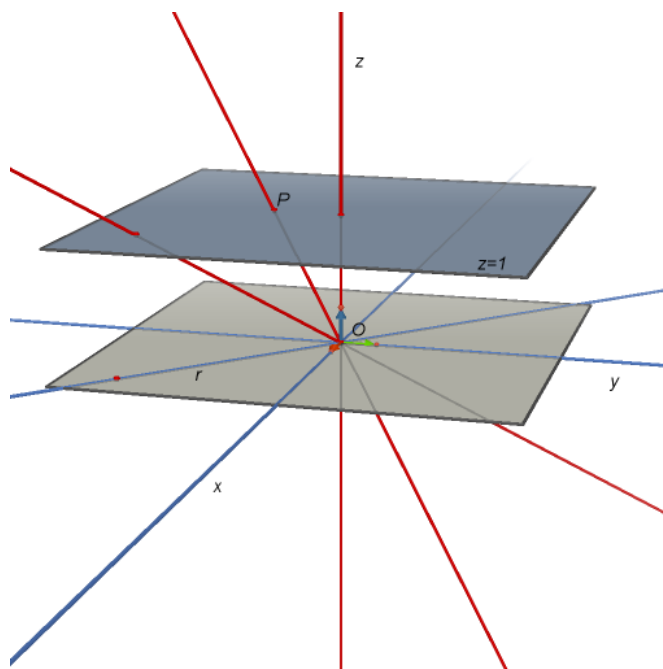
Dato un piano π nello spazio, si può scegliere il sistema di riferimento cartesiano in modo che π abbia l'equazione $z = 1$: allora, i punti di π sono in corrispondenza biunivoca con le terne $(x,y,1)$.

Proiettiamo π dall'origine O delle coordinate: scelto $P = (x^*,y^*,1)$, costruiamo la retta OP , che è l'insieme di tutti i punti con coordinate (tx^*,ty^*,t) , al variare di t .

Chiamiamo S l'insieme di tutte le rette per O (stella di rette). E' lecito dire che la proiezione

$$p_O : (x, y, 1) \in \pi \rightarrow \{(tx, ty, t), t \in \mathbb{R}\} \in S$$

costituisce una biiezione tra π e S ?



Nella figura, sono indicate in rosso alcune rette che intersecano il piano $z = 1$, ed in blu le rette r, x, y che non lo intersecano. Per rendere biiettiva la corrispondenza p_O occorre ampliare il piano π con i punti impropri: infatti, una qualsiasi retta r per O giacente nel piano $z = 0$ è, per l'applicazione p_O , l'immagine del punto improprio di π che appartiene alle rette parallele ad r .

Indichiamo con $\bar{\pi}$ il piano ampliato con i punti impropri. Ci proponiamo di rappresentare l'applicazione $p_O^{-1} : S \rightarrow \bar{\pi}$.

Ricordiamo che una retta $r \in S$ è determinata dai suoi parametri direttori (l,m,n) cioè da un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$. Infatti, se sono assegnati i parametri direttori $(l,m,n) \neq (0,0,0)$, si possono scrivere le equazioni parametriche di r :

$$x = tl, \quad y = tm, \quad z = tn.$$

Esse forniscono le coordinate di tutti i punti di r , al variare del parametro t .

Per trovare il punto $p_O^{-1}(r) = r \cap \bar{\pi}$ basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = lt \\ y = mt \\ z = nt \\ z = 1 \end{cases}.$$

Se è $n \neq 0$, si ha

$$p_O^{-1}(r) = \left(\frac{l}{n}, \frac{m}{n}, 1 \right);$$

se invece è $n = 0$, cioè se r è **parallela a π** , $p_O^{-1}(r)$ è la **direzione** di r , quindi conveniamo di porre

$$p_O^{-1}(r) = (l, m, 0).$$

Queste considerazioni conducono a riformulare la rappresentazione in coordinate della proiezione $p_O : \pi \rightarrow S$ nel seguente modo:

- se P è il punto proprio di coordinate $(a, b, 1)$, allora $p_O(P) = \{(ta, tb, t)\}$
- se P è il punto improprio corrispondente alla direzione $(a, b, 0)$, allora $p_O(P) = \{(ta, tb, 0)\}$.

Consideriamo ora il piano senza pensarlo contenuto nello spazio.

Indichiamo con Π il piano, riferito a coordinate cartesiane (x, y) , e con $\overline{\Pi}$ il piano ampliato con i punti impropri. Per ogni $P \in \overline{\Pi}$, chiamiamo **coordinate omogenee** di P ogni terna ordinata $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ tale che

- se P è il punto proprio di coordinate (x, y) , è $x_3 \neq 0$, e $x_1/x_3 = x$, $x_2/x_3 = y$,
- se P è il punto improprio corrispondente alla direzione del vettore (l, m) , è $x_1/x_2 = l/m$, $x_3 = 0$.

Le coordinate omogenee sono quindi *definite a meno di un fattore comune, non nullo*.

Data in Π una retta di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$, se ne ricava la rappresentazione in coordinate omogenee sostituendo a x il quoziente x_1/x_3 , sostituendo x_2/x_3 a y e moltiplicando ambo i membri per x_3 (che è $\neq 0$); si ottiene quindi **l'equazione omogenea**:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Tutte le terne (x_1, x_2, x_3) , con $x_3 \neq 0$, che soddisfanno l'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ individuano punti di coordinate $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$ che verificano $ax + by + c = 0$; ma tra le soluzioni dell'equazione omogenea c'è anche

$$(-b, a, 0);$$

questa terna verifica anche ogni equazione

$$ax_1 + bx_2 + c'x_3 = 0, \text{ per ogni } c'.$$

Essa quindi corrisponde al punto di $\overline{\Pi}$ che è comune a tutte le rette di $\overline{\Pi}$ le cui equazioni non omogenee (che si ottengono dividendo per x_3 e sostituendo x, y ai rapporti $x_1/x_3, x_2/x_3$) sono

$$ax + by + c' = 0,$$

cioè esso è comune a tutte le rette di un fascio di rette parallele: è il punto improprio di quelle rette.

Non vi è dunque coincidenza tra i sottoinsiemi di $\overline{\Pi}$ definiti dalle due equazioni $ax + by + c = 0$, $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. La seconda equazione rappresenta la retta della prima equazione, ampliata con il suo punto improprio; questa retta ampliata è detta anche “*chiusura proiettiva*” della retta di equazione $ax + by + c = 0$.

Viceversa, ogni equazione omogenea nelle tre variabili (x_1, x_2, x_3) determina una *retta* in $\overline{\Pi}$; in particolare l'equazione

$$x_3 = 0$$

rappresenta la **retta impropria**.

Il punto $(-b, a, 0)$ risulta quindi essere l'intersezione della retta di equazione $x_3 = 0$ con la retta $ax_1 + bx_2 + c'x_3 = 0$, per qualunque c' ; esso appartiene alle chiusure proiettive delle rette di un fascio di rette parallele.