

Esercizi sulle operazioni di proiezione e sezione.

1. Nello spazio riferito a coordinate cartesiane ortogonali (x,y,z) è assegnato il punto $C = (0,0,1)$. Sia α il piano di equazione $z = 0$. Indichiamo con p_C l'applicazione "proiezione da C su α ", che ad ogni punto $P = (a,b,c)$ dello spazio, diverso da C , associa il punto $P' = (x',y',0)$ che è l'intersezione della retta di P e C col piano α .

- Trovare le equazioni di p_C , cioè le relazioni che legano x', y' con a, b, c .
- Utilizzare le equazioni di p_C per verificare che l'applicazione non è definita su tutto lo spazio; interpretare geometricamente i risultati analitici ottenuti.
- Verificare, usando le equazioni, che p_C non è iniettiva; in particolare, determinare l'insieme $p_C^{-1}((0,2,0))$, insieme delle controimmagini del punto $(0,2,0)$.

2. Ripetere l'esercizio precedente per il caso in cui il centro di proiezione sia il punto improprio dell'asse delle z , cioè:

- trovare le equazioni della proiezione ortogonale dello spazio sul piano $z = 0$,
- verificare che la proiezione ortogonale non è iniettiva e in particolare determinare le controimmagini di $(0,2,0)$,
- verificare che la proiezione ortogonale sul piano $z = 0$ è bigettiva se ristretta al piano $z = k$, per k fissato;
- di che applicazione si tratta se la proiezione ortogonale è ristretta al piano $z = 0$?.

Esercizi sulle coordinate omogenee nel piano e nello spazio.

1. Scrivere le equazioni delle chiusure proiettive e trovare i punti impropri dei sottoinsiemi del piano definiti dalle equazioni

$$1) 2x + 3y = 2; \quad 2) 2x + 3y = 0; \quad 3) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1; \quad 4) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad 5) x^2 - y^2 = 0.$$

2. Procedendo per analogia con quanto imparato a proposito del piano, introdurre le coordinate cartesiane omogenee nello spazio e scrivere le equazioni delle chiusure proiettive dei sottoinsiemi definiti dalle equazioni

$$a) x + y + z = 1; \quad b) x = y = 0; \quad c) \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}; \quad d) \begin{cases} z = 3 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 9 \end{cases}; \quad e) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 3t \\ z = 4t, \end{cases} \quad (t \text{ parametro reale})$$

Per ciascuna chiusura proiettiva trovata, determinare la sua intersezione con il piano improprio (il suo "luogo improprio").

3. Determinare le coordinate omogenee del punto improprio della retta di equazioni

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -x + y + z = -2 \end{cases}$$

Trovare delle equazioni parametriche della stessa retta e confrontare i suoi parametri direttori con le coordinate del suo punto improprio.

4. Trovare i luoghi impropri della retta e del piano definiti rispettivamente da

$$x = y = z \quad \text{e da} \quad 3x - 2y - z = 3.$$

Trovare

- se esiste, l'intersezione della retta e del piano nello spazio usuale
- l'intersezione dei loro luoghi impropri.