

7. Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(K)$.

Nel seguito, indicheremo con [Testo] il volume

M. Beltrametti, E. Carletti, D. Gallarati, G. Monti Bragadin, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Bollati Boringhieri, Torino, 2002.

In [Testo] n. 1.2 (pag. 15 e seguenti) si trovano gli argomenti della lezione del 15 ottobre 2007:

- Definizione di spazio proiettivo di dimensione n su un campo K
- Definizione di sottospazio proiettivo
- Coordinate proiettive omogenee
- Modelli geometrici per il piano proiettivo reale: la stella delle rette per l'origine in $\mathbb{R}^3$, il quoziente della sfera S^2 rispetto alla relazione che identifica punti diametralmente opposti.

Precisazione a proposito dell'esempio 1.2.1 (pag. 18). Vi compaiono i simboli $A^3(K)$, $A^n(K)$, che nel testo sono stati introdotti nel n. 1.1, da noi omissi. Aggiungiamo quindi la definizione provvisoria:

lo spazio affine di dimensione 3 (analogamente, di dimensione n) $A^3(K)$ (analogamente, $A^n(K)$) sul campo K è l'insieme delle terne ordinate (x,y,z) (delle n -uple ordinate) di elementi di K .

Nel caso in cui $K = \mathbb{R}$, la geometria dello spazio affine tridimensionale è quella dello spazio usuale, nel quale valgono le relazioni di allineamento e complanarità tra punti, di parallelismo tra rette, tra rette e piani, tra piani.

8. Somma, combinazione lineare di punti. Sottospazi proiettivi. La formula di Grassmann.

Vedere [Testo] n. 1.2, 1.3, 1.4 per gli argomenti della lezione del 16 ottobre '07:

- Somma di punti, combinazione lineare
- Punti linearmente indipendenti
- Equazione di un iperpiano
- Un sistema di k equazioni, **indipendenti**, lineari, omogenee, nelle coordinate proiettive di $\mathbb{P}^n(K)$, individua un sottospazio proiettivo di dimensione k
- Equazioni parametriche di un sottospazio proiettivo
- Sottospazio intersezione e sottospazio congiungente di due sottospazi proiettivi
- La formula di Grassmann

La dimostrazione della formula di Grassmann del n. 1.4.6. è stata fatta come consigliato nella osservazione 1.4.7 a pag. 25, cioè utilizzando la formula di Grassmann valida per i sottospazi vettoriali; pertanto il n. 1.4.6 è stato omissi.

Precisazione a proposito dell'uso della regola di Kronecker, in [Testo], n. 1.3, pag. 21, per trovare le equazioni cartesiane di un sottospazio proiettivo di dimensione k in $\mathbb{P}^n(K)$.

Le coordinate del punto generico del sottospazio, $P = [\mathbf{x}]$, sono combinazione lineare di quelle dei punti P_i , $i = 1, 2, \dots, k+1$, generatori linearmente indipendenti del sottospazio, se e solo se la matrice costruita con questi vettori (in colonna nel testo, in riga a lezione) ha rango $k+1$.

Essendo i punti P_i , $i = 1, 2, \dots, k+1$, per ipotesi linearmente indipendenti, i loro vettori delle coordinate formano una matrice di rango $k+1$. Ricordando che il rango per righe è uguale a quello

per colonne, concludiamo che nella matrice considerata esiste una¹ sottomatrice quadrata di ordine $k+1$ (all'incrocio delle righe e delle colonne indipendenti!) che ha il determinante diverso da 0.

Se si orla questa matrice con le righe e colonne restanti, si ottengono $n + 1 - (k + 1) = n - k$ matrici quadrate², il cui determinante deve essere 0 (altrimenti il numero delle righe e colonne indipendenti sarebbe maggiore...): ecco le $n - k$ equazioni cartesiane del sottospazio.

Se non si vuol ricorrere all'osservazione precedente (attribuita a Kronecker), si può ridurre a scalini la matrice considerata sopra ed imporre che i pivot siano esattamente $k + 1$: di nuovo ci si trova a scrivere $n - k$ equazioni lineari.

9. Conseguenze della formula di Grassmann. Sistemi di riferimento proiettivi, trasformazioni di coordinate.

In [Testo] n. 1.4, si trovano gli argomenti della lezione del 17 ottobre:

- Sottospazi sghembi, dimensione del sottospazio vuoto
- Sottospazi in posizione generale
- Sottospazi complementari
- Sistemi di riferimento, punti fondamentali e punto unità
- Sistemi di riferimento sui sottospazi

Omessi: gli esempi 1.4.12, 1.4.13 (pag. 28-29)

Esercizi su spazi e sottospazi proiettivi.

1. In $P^2(R)$, sono assegnati i punti $A = [1,1,1]$, $B = [0,1,0]$, $C = [1,0,3]$.
 - (a) Scrivere equazioni parametriche e cartesiana della retta AB .
 - (b) Stabilire se i punti A , B , C sono in posizione generale.
 - (c) Trovare il punto di intersezione tra la retta AB e la retta di equazione $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.
2. In $P^3(R)$, sono assegnati i punti $A = [1,1,1,0]$, $B = [0,1,0,1]$, $C = [1,0,3,1]$.
 - (a) Scrivere un'equazione del piano ABC .
 - (b) Trovare delle equazioni parametriche per il piano α di equazione $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$.
 - (c) Stabilire se il piano α e la retta AB sono in posizione generale.
 - (d) Scrivere delle equazioni che rappresentino una retta passante per C che sia in posizione generale rispetto alla retta AB .
3. In $P^4(R)$, sono assegnati i punti $A = [1,1,1,0,0]$, $B = [0,1,0,0,0]$, $C = [2,0,3,4,0]$ e l'iperpiano β di equazione $x_1 - x_5 = 0$.
 - (a) Rappresentare la retta AB in forma implicita (come intersezione di iperpiani).
 - (b) Rappresentare lo spazio γ congiungente la retta AB con il punto C in forma parametrica e in forma implicita.
 - (c) Stabilire se la retta AB e l'iperpiano β sono in posizione generale.
 - (d) Stabilire se i sottospazi γ e β sono in posizione generale, trovando anche delle equazioni per la loro intersezione.

¹ almeno una

² di ordine $k + 2$

- (e) Stabilire la dimensione e trovare una rappresentazione parametrica del sottospazio δ di equazioni
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$
- (f) Stabilire se i sottospazi δ e γ sono in posizione generale, trovando anche delle equazioni per la loro intersezione.
- (g) Trovare un sottospazio che sia complementare del sottospazio δ .
- (h) Verificare che i punti $H = [2,3,2,0,0]$, $K = [1,0,1,0,0]$ appartengono alla retta AB e determinare le coordinate proiettive di K nel riferimento proiettivo (sulla retta) che ha come punti fondamentali A, B e come punto unità H .

4. In $P^5(\mathbb{R})$, sono assegnati:

- a) due piani (sottospazi di dimensione due) in posizione generale.
- b) due rette in posizione generale.

Qual è la dimensione dei sottospazi intersezione e congiungente in ciascuno dei due casi?

5. Dimostrare, usando la formula di Grassmann, che se due rette in $P^n(\mathbb{R})$ (con $n > 2$) si intersecano in un punto, allora sono contenute in uno stesso piano.

6. (i) E' vero che, dati in $P^3(\mathbb{R})$ due rette r, s sghembe (cioè, in posizione generale) ed un punto P che non appartiene a nessuna delle due, esiste una retta (sola) retta passante per P ed incidente ad entrambe r, s ?

(ii) In $P^4(\mathbb{R})$, sono assegnate due rette r, s in posizione generale ed un punto P che non appartiene allo spazio congiungente r, s . E' vero o falso che non esistono rette passanti per P ed incidenti ad entrambe r, s ? (*Suggerimento*: considerare i piani che congiungono P con ciascuna delle rette: lo spazio intersezione dei due piani.....)

7. (Dalla prova scritta del 29 marzo 2006). Nello spazio proiettivo $P^4(\mathbb{R})$ sono assegnati i punti:

$$A = [1,0,0,0,1], B = [2,1,0,0,1], C = [2,0,0,1,2], D = [0,0,0,1,0].$$

- (a) Stabilire se questi punti sono in posizione generale; detto J lo spazio congiungente di A, B, C, D , rappresentare J sia in forma parametrica sia in forma implicita (cartesiana).
- (b) Rappresentare in forma implicita e in forma parametrica lo spazio γ intersezione di J con l'iperpiano π di equazione $x_1 - x_4 - x_5 = 0$. Qual è lo spazio congiungente di π e J ?

8. (Dalla prova scritta dell'11 luglio 2007) In $P^3(\mathbb{R})$, sono assegnati il punto $U = [1,1,1,1]$ e la retta s di equazioni cartesiane $x_1 = x_2 = 0$.

- a) Scrivere un'equazione cartesiana del sottospazio proiettivo π congiungente U ed s .
- b) Sia $P = [1,0,1,0]$. Scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane della retta u congiungente U con P .
- c) Stabilire se le rette s ed u sono in posizione generale.