

22. Caratteristica di un'omologia. Sottogruppi del gruppo delle proiettività piane: affinità, similitudini, isometrie. Proprietà affini e proprietà euclidee.

Vedere [Testo] paragrafo iniziale di 4.6, 4.7 e l'appunto qui sotto per gli argomenti della lezione del 19 novembre 2007:

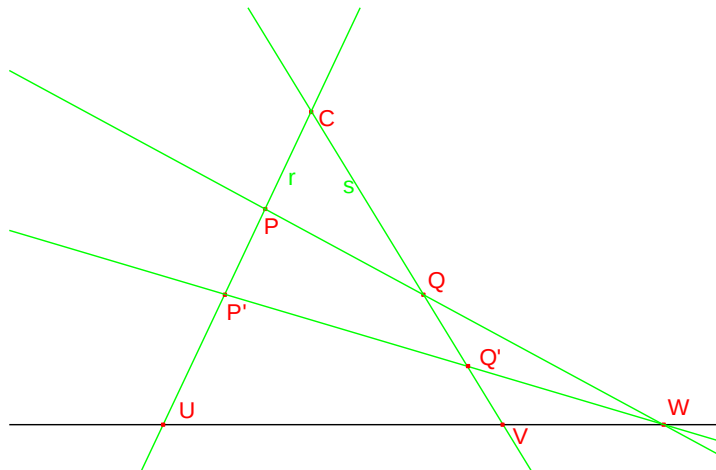
- Caratteristica di un'omologia
- Affinità
- Invarianti affini: rapporto semplice, punto medio tra due punti, parallelismo
- Similitudini
- Omologie che sono similitudini
- Invarianti per similitudine
- Isometrie
- Sottogeometrie della geometria proiettiva reale.

Sulla caratteristica di un'omologia non speciale.

Teorema (adattamento al caso piano del teorema 3.5.2 del testo)

Se φ è un'omologia piana non speciale, di centro C , al variare del punto P (non unito), è costante il birapporto dei punti P , $\varphi(P)$, C e del punto U in cui la retta di P e $\varphi(P)$ incontra l'asse dell'omologia.

Idea della dimostrazione. Sia r la retta individuata da P , $\varphi(P)$: r è unita, quindi la restrizione dell'omologia φ alla retta r è una proiettività di r in se stessa, che ha come punti uniti il centro C ed il punto U in cui r incontra l'asse dell'omologia. Come sappiamo dallo studio delle proiettività della retta in se stessa, il birapporto di due punti corrispondenti P , $\varphi(P)$ e dei due punti uniti è costante. Si dimostra facilmente (si veda il disegno qui sotto, dove $\varphi(P)=P'$, $\varphi(Q)=Q'$) che il valore di questo birapporto è lo stesso per ogni retta passante per C .



Definizione. Il birapporto della quaterna formata da due punti corrispondenti P , P' , il centro C e l'intersezione della retta di P e P' con l'asse viene detto **caratteristica dell'omologia**; se la caratteristica è -1 l'omologia si chiama armonica.

Un calcolo privo di difficoltà mostra che **il valore della caratteristica di un'omologia piana è il rapporto tra i due autovalori distinti della matrice associata.**

Una omologia armonica è una proiettività involutoria. (Perché?)

Corollario: un'omologia piana è completamente individuata se sono dati il centro C , l'asse a e la caratteristica (diversa da 1 e da 0). Infatti, dato un punto P (non unito) è unico il punto P' che si

trova sulla retta di C e P e forma un dato birapporto dopo C , il punto comune all'asse e alla retta, e P .

23. Il teorema di Chasles. La polarità e le coniche.

Vedere [Testo] 4.7, 6.2, 6.3 per gli argomenti della lezione del 20 novembre 2007:

- La classificazione delle isometrie: teorema di Chasles
- Polarità, legge di reciprocità.
- Punti autoconiugati.
- Punti singolari di una polarità, coniche degeneri
- Intersezioni di una retta con una conica. Tangente in un punto di una conica.

Nota. Nel testo c'è un evidente errore nell'enunciato del teorema di Chasles (teorema 4.7.6 a pag. 149): *una rotazione di centro P in generale **non** è un'omologia di centro P ; è una proiettività con un punto fisso reale e due punti fissi complessi coniugati sulla retta impropria.* Soltanto la rotazione di 180° è un'omologia, anzi un'omologia armonica.

24. Classificazioni proiettiva, affine, euclidea delle coniche.

Vedere [Testo] 6.5.1 (solo la definizione), 6.4, 6.11 e l'appunto che segue, per gli argomenti della lezione del 21 novembre 2007:

- Involuzione dei punti coniugati
- Proprietà armonica della polare
- Triangoli autopolari
- Forme canoniche delle coniche reali, il rango come invariante proiettivo
- Intersezioni con la retta impropria, classificazione affine delle coniche non degeneri
- Centro e diametri di una conica, involuzione dei diametri coniugati, asintoti
- Proprietà di simmetria rispetto al centro come conseguenza della proprietà armonica della polare
- Assi e classificazione euclidea.

A proposito di assi e della classificazione euclidea delle coniche reali.

Per definizione, **asse** è un diametro che sia coniugato della direzione ortogonale alla sua; in altre parole, gli assi formano una coppia di diametri tra loro coniugati e ortogonali.

Scegliendo, nel piano euclideo, il sistema di riferimento (cartesiano ortogonale monometrico) in modo che le rette di equazione $y = 0$, $x = 0$ coincidano con gli assi della conica, si ottengono per le coniche nel piano euclideo le equazioni in forma canonica che sono **note** dal corso di *Geometria analitica* del primo anno.

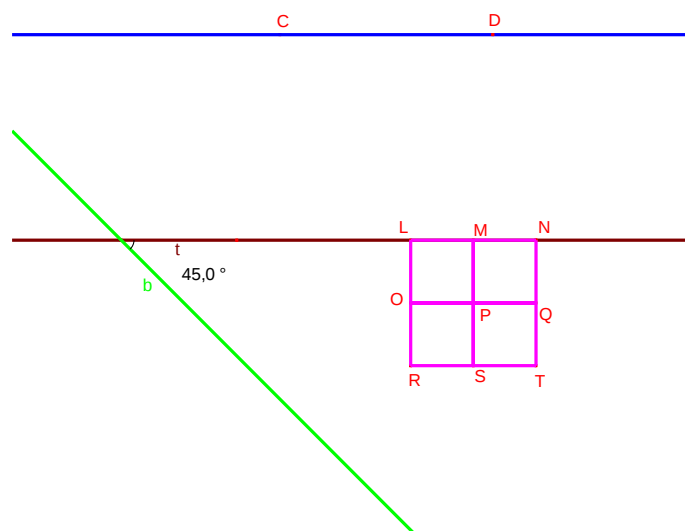
Poiché le trasformazioni euclidee sono particolari trasformazioni affini, che conservano angoli e distanze, due coniche dello stesso tipo affine (ad esempio, due ellissi) non sono necessariamente equivalenti dal punto di vista euclideo. Per esempio, la lunghezza dei segmenti intercettati da una ellisse sui suoi assi è un invariante euclideo ma non affine: pertanto, due ellissi sono equivalenti rispetto a trasformazioni euclidee se e soltanto se i “semiassi” dell'una sono ordinatamente uguali

a quelli dell'altra: allora entrambe possono essere portate nella forma canonica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con a, b fissati.

Mentre **nel piano affine** due **qualsiasi** ellissi sono equivalenti, perché con una affinità le loro equazioni possono ridursi alla forma $x^2 + y^2 = 1$, **nel piano euclideo** invece soltanto le circonferenze con raggio unitario possono avere questa equazione canonica, e ci sono infinite ellissi non equivalenti tra loro.

Esercizi sulle applicazioni dell'omologia, sulle affinità e isometrie.

1. Disegnare una retta a , tre punti A, B, A' non allineati e fuori di a . Disegnare il punto U di intersezione tra a e la retta congiungente A con B , congiungere U con A' e su questa retta scegliere un punto B' . Preso un punto a piacere C diverso dai precedenti, costruire con la riga il punto C' che è immagine di C nell'omologia di asse a che manda A in A', B in B' .
2. Ricordando l'esercizio precedente, costruire i corrispondenti dei quattro quadrati della figura qui sotto, nell'omologia di asse t in cui C è l'immagine della direzione perpendicolare a t e D è l'immagine del punto improprio della retta b .



3. Scrivere delle equazioni che rappresentino l'omologia del piano proiettivo con centro $[0,1,0]$ e asse $x_2 = 0$, che manda il punto $[2,1,1]$ nel punto $[-2,1,-1]$. Studiare l'affinità che è la restrizione di questa omologia all'aperto $x_3 \neq 0$.

4. Trovare i punti uniti e le eventuali rette unite in ciascuna delle affinità di equazioni $\begin{cases} x' = 3x + 2y - 1 \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$, $\begin{cases} x' = 2x + 3 \\ y' = -2y + 1 \end{cases}$; nel caso che una di queste affinità fosse un'omotetia, determinare il rapporto di omotetia.

5. Determinare i punti uniti delle proiettività associate ad $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e studiare

le affinità che si ottengono restringendo quelle proiettività all'insieme dei punti per i quali è $x_3 \neq 0$ (cioè passando a coordinate non omogenee $x = x_1/x_3, y = x_2/x_3$).

6. Studiare le isometrie di equazioni $a) \begin{cases} x' = \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} - 1 \\ y' = \frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases}$; $b) \begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = -y - 5 \end{cases}$; $c) \begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = y - 5 \end{cases}$

stabilendo per ciascuna se sia una rotazione, o una traslazione, o una riflessione rispetto ad una retta, oppure una glissoriflessione (prodotto di una riflessione per una traslazione).

7. Studiare l'isometria che si ottiene dal prodotto di due simmetrie assiali rispetto ad assi paralleli. (*Suggerimenti*: se si opta per una soluzione analitica, scegliere convenientemente il sistema di riferimento; altrimenti, cercare eventuali punti fissi). E se gli assi delle due simmetrie non sono paralleli?

Esercizi sulla polarità e sulle coniche

1. Perché il rango della matrice di una polarità (e della conica associata) è un invariante proiettivo?
2. Stabilire se la conica di equazione $x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$ è degenere; in caso affermativo, determinare i suoi punti doppi. Trovare inoltre a) la polare di $[0,1,1]$ b) il polo della retta $x_1 = 0$ c) la retta tangente in $[0,1,0]$.
3. Verificare che le coniche di equazioni

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_3^2 = 0; \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$$
 sono degeneri, e determinare le loro componenti.
4. La polarità definita dalla conica $x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 = 0$ induce nel fascio di centro $[1,0,0]$ l'involuzione delle rette coniugate: scrivere un'equazione dell'involuzione e verificare che gli elementi uniti sono le due tangenti alla conica.
5. Determinare un'equazione che rappresenti la conica per la quale la retta $x_1 = 0$ è la polare del punto $[1,1,0]$ e che passa per i punti $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[2, 0,1]$. Considerata la conica affine che è l'intersezione della precedente conica con l'insieme definito dalla condizione $x_3 \neq 0$, determinarne il tipo, e, se possibile, il centro e gli asintoti.
6. Determinare il centro, la tangente nell'origine e, se possibile, gli asintoti delle coniche di equazioni

$$x^2 - 5xy + 4y^2 - 2x = 0; \quad x^2 + 4xy + 8y^2 - 2x = 0.$$
7. Vero o falso? Giustificare ogni risposta.
 - a) Le equazioni che seguono rappresentano coniche equivalenti per affinità

$$x^2 + y^2 = 1, \quad 6x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + 8y^2 + 2xy - 4x = 0.$$
 - b) Le equazioni che seguono rappresentano coniche proiettivamente equivalenti:

$$2xy - 4x = 0, \quad x^2 - y^2 + 4x = 0, \quad x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 - 4 = 0.$$
8. Verificare che la polare del fuoco di una parabola è la direttrice della parabola, e che, nel fascio che ha come centro il fuoco, l'involuzione delle rette coniugate coincide con l'involuzione ortogonale, cioè quella che ad ogni retta del fascio associa la sua perpendicolare. (*Suggerimento:* è lecito prendere una parabola in forma canonica.)
9. Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro, per la quale l'involuzione dei diametri coniugati coincide con l'involuzione ortogonale (cioè, quella che ad ogni retta per il centro fa corrispondere la retta ortogonale): che tipo di conica è $\mathcal{C}$?
10. Quanti possono essere i punti comuni a due coniche distinte?
11. Giustificare l'affermazione: i diametri di una parabola sono tra loro paralleli. Verificare analiticamente, considerando la parabola di equazione canonica $y^2 - 2x = 0$, che i punti medi delle intersezioni della parabola con le rette per il punto improprio $[a,b,0]$ giacciono sul diametro coniugato a $[a,b,0]$.