

Geometria euclidea, affine e proiettiva.

0. Presentazione del corso.

I contenuti sono, in linea di massima, quelli indicati nel Manifesto degli studi del Corso di laurea in Matematica, con qualche sostanziosa variazione rispetto al corso con lo stesso nome che si è svolto nel secondo semestre dell'anno accademico 2006/07.

Rispetto allo scorso anno, sarà infatti dedicata maggior attenzione a:

- la distinzione tra geometria euclidea, affine e proiettiva in base al programma di Erlangen
- la nascita della geometria proiettiva, per interpretare le tecniche della prospettiva
- l'impostazione sintetica basata sulle proprietà grafiche
- l'immersione del piano affine nel piano proiettivo.

Prerequisiti al corso.

Geometria analitica elementare: equazioni cartesiane e parametriche di rette e coniche nel piano, di rette, piani, cilindri, sfere nello spazio. *Sistemi lineari*: il teorema di Rouché-Capelli, autosoluzioni di un sistema lineare omogeneo. *Algebra lineare*: spazi vettoriali, sottospazi, dimensioni, formula di Grassmann, applicazioni lineari e matrici associate, nucleo e immagine di un'applicazione lineare, relazione tra rango della matrice, dimensione del nucleo, dimensione dell'immagine dell'applicazione associata alla matrice; autovalori e autovettori.

Gli obiettivi del corso:

- giungere ad interpretare la geometria euclidea classica come una teoria inclusa in una gerarchia di teorie geometriche più ampie; la classificazione è indotta dall'inclusione, come sottogruppo, del gruppo delle trasformazioni dello spazio euclideo in quelle dello spazio affine e, a sua volta, dell'inclusione di questo nel gruppo delle trasformazioni proiettive;
- conoscere il modello geometrico del fenomeno della visione perfezionato dai pittori rinascimentali, i fondamenti della geometria proiettiva classica e quelli della successiva sistemazione in linguaggio algebrico;
- utilizzare la teoria della polarità per ottenere la classificazione proiettiva delle coniche complesse, ricavare la classificazione e alcune proprietà delle coniche affini, impostare lo studio delle quadriche proiettive, con qualche osservazione a proposito delle differenze tra le teorie sul campo complesso e sul campo reale.

Riferimenti bibliografici.

Alcuni capitoli (che verranno indicati di volta in volta) da

- Beltrametti, Carletti, Gallarati, Monti Bragadin, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Bollati Boringhieri, Torino, 2002
- Catastini-Ghione, *Le geometrie della visione*, Springer, 2003, parti del quale si possono trovare in <http://www.mat.uniroma2.it/mep>
- Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 1989
- Enriques, *Lezioni di geometria proiettiva*; Zanichelli, Bologna, ristampa anastatica dell'edizione del 1904
- Stillwell, *The four pillars of geometry*, Springer, New York, 2005
 - <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Art.html>
 - www.treccani.it/site/Scuola/Zoom/prospettiva/scuola_zoom.htm
 - <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Architecture.html>
- Appunti schematici delle lezioni e testi degli esercizi nel sito <http://www.mat.unical.it/%7Edaprile/Materiali.htm>

Sui metodi didattici.

Ogni giovedì verrà assegnato un breve compito, da svolgere individualmente e consegnare il lunedì successivo, per la correzione da parte del docente. Aver svolto almeno quattro su sette compiti influisce sul voto finale.

A metà corso, si terrà un'esercitazione scritta di due ore, con lo scopo di riepilogare la parte svolta fino a quel momento; il risultato positivo in questa prova influisce sulla valutazione finale. Il corso si concluderà con un'esercitazione scritta su esercizi e problemi simili a quelli che saranno assegnati all'esame.

Gli studenti sono invitati ad usufruire delle ore "di ricevimento" e della posta elettronica per chiarire tempestivamente eventuali dubbi e per tenersi aggiornati con lo svolgimento del corso.

M. D'Aprile **riceve** gli studenti di questo corso ogni lunedì dalle 14.30 alle 16 nel suo **studio** nell'edificio 31B, sesto piano (livello ponte carrabile) oppure per appuntamento: **tel.** 0984/496452, **posta elettronica** m.daprile@unical.it

Esame.

L'esame consiste di una prova scritta e una prova orale, che vertono sugli argomenti effettivamente svolti nelle lezioni. Si è ammessi alla prova orale se il voto della prova scritta è non inferiore ad un certo voto minimo (ordinariamente 14).

E' obbligatoria la prenotazione per via elettronica <https://didattica.unical.it/>

1. Euclidea, affine, proiettiva: che cosa indicano questi tre aggettivi?

Il principio su cui si fonda la distinzione tra le tre geometrie di cui ci occuperemo in questo corso è dovuto a Felix Klein, che lo enunciò nella lezione inaugurale dell'anno accademico 1872 all'Università di Erlangen (nel seguito, richiameremo questa lezione con il nome di "Programma di Erlangen").

Secondo Klein, per porre le fondamenta di una teoria geometrica bisogna assegnare un insieme S (spazio) ed un gruppo G di trasformazioni (cioè, di applicazioni bigettive) dello spazio su se stesso. Nelle prime pagine del "programma di Erlangen" si legge: *"il concetto più importante tra quelli necessari per le considerazioni che seguono è quello di gruppo di trasformazioni dello spazio."*

Convien chiamare *punti* gli elementi dell'insieme (spazio) S e chiamare *figure* i sottoinsiemi non vuoti di S . L'esistenza di un gruppo G di bigezioni di S su se stesso determina una **relazione di equivalenza** tra figure contenute in S , definita ponendo, per $F, F', F'' \dots \subseteq S$:

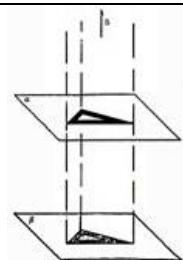
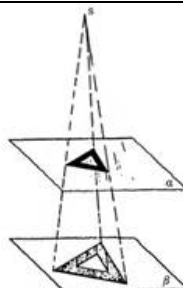
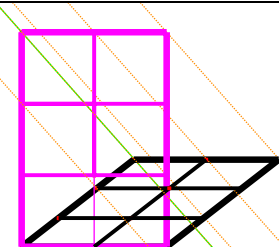
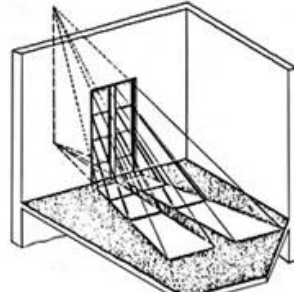
$$F \cong_G F' \text{ se e solo se esiste } \varphi \in G \text{ tale che sia } F' = \varphi(F).$$

Verifichiamo che si tratta di una relazione d'equivalenza.

1. L'elemento neutro del gruppo G (nel quale l'operazione è la composizione di applicazioni) è l'applicazione identità 1_S , che ad ogni punto x di G associa x stesso. Per qualsiasi figura F , da $F = 1_S(F)$ segue che $F \cong_G F$, dunque la relazione gode della proprietà *riflessiva*;
2. poiché ogni elemento $\varphi \in G$ è una bigezione, è ben definita l'applicazione inversa φ^{-1} ; essendo G un gruppo, anche φ^{-1} appartiene a G ; da questo si deduce la relazione è *simmetrica*: se $F \cong_G F'$, da $F' = \varphi(F)$ segue $F = \varphi^{-1}(F')$, quindi $F' \cong_G F$;
3. poiché, per definizione di gruppo, l'applicazione che si ottiene componendo due elementi di G appartiene anch'essa a G , la relazione gode della proprietà *transitiva*: infatti, se $F \cong_G F', F' \cong_G F''$, da $F' = \varphi(F), F'' = \psi(F')$ segue $F'' = \psi \circ \varphi(F)$, quindi $F \cong_G F''$.

Secondo Klein, una teoria geometrica consiste nella ricerca e nello studio della proprietà delle figure che sono **invarianti rispetto alle trasformazioni del gruppo** fissato, cioè non sono alterate dalle trasformazioni del gruppo; in altre parole, una proprietà geometrica di una figura F è soddisfatta da tutte le figure che siano equivalenti ad F rispetto a G .

Su uno stesso insieme S si possono costruire, dunque differenti geometrie: basta scegliere gruppi diversi di trasformazioni di S su se stesso. L'osservazione del mondo fisico suggerisce la considerazione di trasformazioni di vario tipo, su una stessa figura. Un esempio pertinente al nostro studio è dato dalle ombre di una stessa figura piana, per esempio un telaio quadrato o triangolare (le prime due e l'ultima figura sono tratte dall'articolo di Marta Menghini, reperibile in rete ¹).

Se i raggi del sole hanno direzione esattamente perpendicolare al piano della figura e l'ombra è proiettata su un piano parallelo a quello della figura, allora lati ed angoli corrispondenti nella figura e nell'ombra sono uguali: la trasformazione tra le due è di tipo “euclideo” (è una <i>isometria</i>)	
Se la luce proviene da una lampada posta sulla verticale, la figura orizzontale e la sua ombra, su un piano pure orizzontale, hanno ancora angoli corrispondenti uguali, ma lati di lunghezze alterate tutte nello stesso rapporto: le due figure sono <i>simili</i>.	
L'ombra, prodotta dai raggi del sole, di una finestra a maglie quadrate su un piano non parallelo al piano della finestra è un reticolato di parallelogrammi: distanze ed angoli non sono conservati, però lati paralleli hanno ombre parallele. La trasformazione tra le due figure è una <i>affinità</i>.	
L'ombra prodotta da una sorgente di luce puntiforme, come una lampada, non conserva né angoli, né relazioni di parallelismo: i quadrati della vetrata hanno ombre a forma di quadrilateri generici (non necessariamente dei parallelogrammi).	

2. Sulle origini della geometria proiettiva.

Si veda la presentazione Power Point inserita tra i materiali del corso

¹ www.treccani.it/site/Scuola/Zoom/prospettiva/scuola_zoom.htm