10. Cambiamenti di coordinate proiettive. Lo spazio proiettivo duale..

Vedere [Testo] n. 1.5, 1.6 per gli argomenti della lezione del 22 ottobre '07:

- Trasformazioni di coordinate proiettive
- Lo spazio proiettivo duale: un punto [a] di $\mathbb{P}^n$* rappresenta l'iperpiano di equazione $\sum_i a_i x_i$ = ax=0 in $\mathbb{P}^n$
- Dato un sottospazio di dimensione k in $\mathbb{P}^n$, generato dai punti P_1, …. P_{k+1} linearmente indipendenti, gli iperpiani corrispondenti (punti dello spazio duale $\mathbb{P}^n$* con le stesse coordinate) si intersecano in uno spazio di dimensione n – k – 1
- Corrispondenza per dualità: a un sottospazio di dimensione k (k = 0, …, n-1) corrisponde uno di dimensione n-k-1; a "intersezione" corrisponde "congiungente".

Attenzione: errore a pag. 31, la matrice da sostituire ad **A** non si ottiene moltiplicando **A** per il prodotto dei coefficienti $\lambda_1 \dots \lambda_{n+1}$ ma moltiplicando la prima colonna per λ_1, la seconda per λ_2 eccetera: si veda,a pag. 32, la matrice **B**.

11. La legge di dualità. La retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

In [Testo] n. 1.6, esempi 1.7.3, 1.7.4, 1.7.5, esempio 1.2.1 (modelli dello spazio proiettivo reale), n. 2.1, si trovano gli argomenti della lezione del 23 ottobre '07:

- Il principio di dualità
- Immersione dello spazio affine $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{P}^n$, di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{P}^1$.
- La retta proiettiva reale può essere identificata con la circonferenza S^1.
- Il birapporto. Invarianza rispetto a cambiamenti di coordinate in $\mathbb{P}^1$.

12. Il birapporto.

In [Testo] n. 2.1, si trovano gli argomenti della lezione del 24 ottobre '07:

- Il birapporto e le sue proprietà.
- Valori del birapporto di quattro punti, quaterne armoniche
- Rapporti semplici

Esercizi su cambiamenti di coordinate proiettive; coordinate sui sottospazi.

1. Come si trasformano le coordinate proiettive in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, se il nuovo riferimento ha gli stessi punti fondamentali del vecchio e ha come punto unità il punto U' = [−1,2,3,2]?

2. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sono assegnati i punti A = [1,1,1], B = [0,1,0], C = [1,2,1], D = [1,0,3], E = [2,0,0].
   (a) Spiegare perché non è possibile scegliere un sistema di riferimento proiettivo in cui *A*, *B*, *C* siano punti fondamentali, e perché invece si può considerare un sistema $\mathfrak{I}$ di cui *A*, *B*, *D* siano i punti fondamentali ed *E* sia il punto unità.
   (b) Scrivere il cambiamento di coordinate omogenee dal riferimento standard a $\mathfrak{I}$.
   (c) Quali sono le coordinate di *C* nel sistema di riferimento $\mathfrak{I}$?

3. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, è data la retta di equazione $x_1 + 3\,x_2 - x_3 = 0$. Rappresentarla in forma parametrica in modo che i parametri siano le coordinate dei suoi punti rispetto al riferimento proiettivo, sulla retta, che ha come punti fondamentali i punti A_1= [1,0,1], A_2= [0,1,3] e come punto unità U = [2,1,5].

4. Dalla prova d'esame dell'11 aprile 2007
In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sono assegnate due rette *r, s* in posizione generale.
a) Spiegare perché è lecito supporre che le equazioni cartesiane di *r* siano $x_1 = x_2 = 0$ e le equazioni di *s* siano $x_3 = x_4 = 0$.
b) Sia $P = [1,0,1,0]$. Scrivere delle equazioni cartesiane della retta *a* che passa per *P* ed è complanare sia con *r* che con *s* .

5. (a) In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia $S(A, B; M)$ il riferimento proiettivo che ha come punti fondamentali $A = [1,2]$, $B = [3,-2]$ e come punto unità $M = [2,0]$. Scrivere il cambiamento di coordinate dal riferimento standard al riferimento $S(A, B; M)$.
(b) Si identifichi la retta affine $\mathbb{A}^1$ con $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ meno il punto *B*. Nel sistema di coordinate affini che si ottiene restringendo ad $\mathbb{A}^1$ il riferimento $S(A, B; M)$ e passando a coordinate non omogenee, qual è la coordinata affine di *M*?

6. Si consideri il cambiamento di coordinate di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ assegnato dalle equazioni $\begin{cases} \rho x'_1 = x_1 \\ \rho x'_2 = 2x_2 \\ \rho x'_3 = x_1 + 3x_2 - x_3 \end{cases}$.

a) Quali equazioni hanno, nelle vecchie coordinate, le rette che sono i lati del nuovo riferimento proiettivo?

b) Sia $\mathscr{P}$ la curva di equazione $x_1(x_1 + 3x_2 - x_3) - x_2^2 = 0$. Trovare una sua equazione nelle nuove coordinate.

c) Trovare le equazioni che rappresentano la curva $\mathscr{P}$ nei due sistemi di coordinate affini ottenuti il primo passando alle coordinate non omogenee $X = \dfrac{x_1}{x_3}, Y = \dfrac{x_2}{x_3}$, il secondo ponendo $X' = \dfrac{x'_1}{x'_3}, Y' = \dfrac{x'_2}{x'_3}$.

Esercizi sulla dualità

1. Scrivere la proposizione duale di ciascuna delle seguenti proposizioni.
   (a) Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, fissato un punto *P*, vi sono infinite rette passanti per *P*.
   (b) Dati in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ quattro punti *A, B, C, D* , a tre a tre non allineati, esistono sei rette che li congiungono a due a due. Tali rette si intersecano, oltre che nei punti *A, B, C, D,* in altri tre punti *P,Q,R*.
   (c) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, date tre rette *a, b, c* a due a due sghembe tra loro, esistono infinite rette che le incontrano tutte e tre; e precisamente, per ogni punto *P* su *a* , esiste una retta passante per *P* che interseca sia *b* sia *c*.
   (d) In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, assegnate due rette *r, s* in posizione generale ed un punto *P* che non appartiene allo spazio congiungente di *r,s*, non esiste nessuna retta che passi per *P* e sia incidente ad entrambe *r,s.*

2. Dividere la pagina a metà con una riga verticale e scrivere a sinistra una giustificazione per ciascuna delle affermazioni dell'esercizio precedente e a destra quella della sua duale (*suggerimento:* utilizzare le definizioni di sottospazi proiettivi e di spazio congiungente, la formula di Grassmann, la definizione di "posizione generale" e la legge di dualità).

Esempio di svolgimento

(a)	Consideriamo un punto $Q_1 \neq P$; sia r_1 la retta che congiunge P,Q_1. Esiste Q_2 fuori di r_1 ; sia r_2 la retta che congiunge P,Q_2. Esiste Q_3 fuori di r_2, e così via: in questo modo si costruiscono infinite rette per P.	Consideriamo una retta $q_1 \neq p$; sia R_1 il punto intersezione di p,q_1. Esiste una retta r_2 che non contiene R_1 ; sia $R_2 = p\cap,q_2$. Esiste q_3 fuori di R_2, e così via: in questo modo si costruiscono infiniti punti su p.
(b)	Le sei coppie (non ordinate) di punti determinano le sei rette (lati del quadrangolo) $J(A,B)$, $J(A,C)$, $J(A,D)$, $J(B,C)$, $J(B,D)$, $J(C,D)$, ognuna delle quali interseca ogni altra. Le coppie di lati che non hanno in comune uno dei quattro vertici A,B,C,D del quadrangolo si intersecano in ulteriori tre punti: $J(A,B)\cap J(D,C)= P$, $J(A,C)\cap J(B,D)= Q$, $J(A,D)\cap J(B,C)= R$.	Le sei coppie (non ordinate) di rette determinano i sei punti (vertici del quadrilatero) $a\cap b$, $a\cap c$, $a\cap d$, $b\cap c$, $b\cap d$, $c\cap d$ ognuno dei quali può essere congiunto con ogni altro. Le coppie di punti che non appartengono ad uno dei quattro lati a,b,c,d del quadrilatero sono congiunti da tre nuove rette: $J(a\cap b, d\cap c)= p$, $J(a\cap c,b\cap d)= q$, $J(a\cap d, b\cap c)= r$.
(c)	Per ogni punto P su a esistono due piani distinti $J(P,b)$, $J(P,c)$ la cui intersezione è una retta che, essendo complanare con b, c, per la formula di Grassmann incontra ciascuna di esse.	Per ogni piano p che contiene a esistono due punti distinti $b\cap p$, $p\cap c$ il cui spazio congiungente è una retta che, avendo intersezione non vuota con b, c, per la formula di Grassmann è complanare con ciascuna di esse.
(d)	Lo spazio congiungente di due rette in posizione generale in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ ha dimensione 3. Siano σ l'iperpiano $J(r,s)$, e t una retta per il punto P, che per ipotesi non appartiene a σ. Allora $J(\sigma,t) = \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$. Dalla formula di Grassmann segue che $\sigma\cap t$ è un punto, che può essere contenuto al più in una sola delle rette r,s (infatti le due rette hanno intersezione vuota).	Lo spazio intersezione di due piani α,β in posizione generale in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ ha dimensione 0. Siano S il punto $\alpha\cap\beta$ e τ un piano contenuto nell'iperpiano π, che per ipotesi non contiene S. Allora $S \cap \tau = \varnothing$. Dalla formula di Grassmann segue che $J(S,\tau)$ è un iperpiano, che può contenere al più uno solo dei due piani dati α, β (infatti, i due piani hanno come congiungente $\mathbb{P}^4$).

3. (dall'esame del 19 settembre 2005) (a) Scrivere la proposizione duale della seguente:
"date nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tre rette (distinte), se esse non giacciono in uno stesso piano, ma sono a due a due complanari, allora esse hanno un punto in comune."
(b) Dimostrare o la proposizione precedente oppure la duale.

Esempio di svolgimento.
(a) *La proposizione duale:* date nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tre rette (distinte), se esse non passano tutte per uno stesso punto, ma a due a due si intersecano in un punto, allora esse stanno in uno stesso piano.
(b)

Dimostrazione della proposizione	Dimostrazione della proposizione duale
Siano a,b,c le rette. Per ipotesi, esiste un piano α che contiene b, c, diverso dal piano β che contiene c, a ed entrambi diversi dal piano γ che contiene a,b. Si ha quindi: $\alpha\cap\beta= c$, $\beta\cap\gamma= a$, $\gamma\cap\alpha= b$. Lo spazio $\alpha\cap\beta\cap\gamma$ coincide con lo spazio $(\alpha\cap\beta)\cap\gamma$, intersezione della retta c con il piano γ : poiché c non è contenute nel piano γ, $\alpha\cap\beta\cap\gamma$ è un punto (della retta c). Lo stesso punto $\alpha\cap\beta\cap\gamma$ coincide anche con l'intersezione del piano α con la retta a; dunque è un punto di a; infine, dovendo coincidere con l'intersezione del piano β con la retta b, giace anche su b: perciò, le tre rette hanno un punto in comune, come volevasi dimostrare.	Siano a,b,c le rette. Per ipotesi, esiste un punto A comune a b, c, diverso dal punto B che è intersezione di c, a ed entrambi diversi dal punto C comune ad a, b. Si ha quindi: la retta c congiunge A con B, la retta a unisce B, C, e la retta b congiunge C, A. Lo spazio $J(A,B,C)$, congiungente dei tre punti A, B, C, coincide con lo spazio $J(c,C)$: poiché c non passa per C, il loro congiungente è un piano (che contiene la retta c). Lo stesso piano $J(A,B,C)$ coincide anche con il congiungente del punto A con la retta a, dunque contiene a; infine, dovendo coincidere con il congiungente del punto B con la retta b, contiene anche la retta b: perciò, le tre rette sono complanari, c. v. d.

Esercizio sul birapporto.

Calcolare il birapporto delle seguenti quaterne ordinate di punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

a) $A = [2,1]$, $B = [-2,1]$, $C = [0,1]$, $D = [4,1]$
b) $A = [4,2]$, $B = [-2,1]$, $C = [0,5]$, $I = [4,0]$
c) $A = [2,1]$; $B = [-6,3]$, $I = [1,0]$, $D = [4,1]$
d) $I = [1,0]$, $D = [4,1]$, $B = [-2,1]$, $E = [22,1]$.