Geometria euclidea, affine e proiettiva – anno acc. 2007/08
27 novembre 2007

Esercizi di ricapitolazione.

1. **Dall'esame del 13 luglio 2006.** Nello spazio proiettivo reale a 4 dimensioni $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sono assegnati i punti $P_1=[1,0,2,0,1]$ e $P_2=[0,1,0,0,3]$ e gli iperpiani π_1 di equazione $x_1+x_2=0$, π_2 di equazione $x_3+x_5=0$. Siano: r la retta congiungente P_1 con P_2, S lo spazio $\pi_1 \cap \pi_2$. Scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane per lo spazio $r \cap S$ e per lo spazio congiungente di r e S e dedurne se r, S siano o non siano in posizione generale.

2. **Dall'esame del 11 luglio 2007.** Enunciare la proposizione duale della proposizione $(\mathcal{P})$.
   $(\mathcal{P})$. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, se un punto X ed un piano α sono in posizione generale, allora lo spazio congiungente X con α è un iperpiano.
Dimostrare la proposizione $(\mathcal{P})$ oppure la sua duale.

3. **Dall'esame del 11 luglio 2007.** Sia σ la proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ su se stesso determinata dalle condizioni di mandare i punti $A=[1,0]$, $B=[0,1]$, $U=[1,1]$ rispettivamente in $\sigma(A)=U$, $\sigma(B)=B$, $\sigma(U)=A$.
Trovare una equazione o delle equazioni per σ e studiare σ, determinando in particolare i suoi punti uniti e la sua caratteristica.

4. **Dall'esame del 11 luglio 2007**. Verificare che la proiettività piana φ, rappresentata in coordinate non omogenee dalle equazioni

$$x' = 2x - 2,\ y' = 2y - 1,$$

è un'omologia e trovare tutti i suoi punti uniti. Stabilire se φ è una similitudine diretta, in particolare se è una omotetia oppure se è una isometria; in questa ultima eventualità, riconoscerne il tipo (tra i quattro tipi possibili di isometrie).

5. **Dall'esame del 11 luglio 2007.** Determinare i coefficienti a, b nell'equazione

$$x^2 + a\,y^2 + 2\,x\,y + 2\,(b+a)\,x + 2\,b\,y + 4 = 0$$

in modo che l'equazione rappresenti una conica $\mathcal{C}$ con il centro nel punto $(-1,2)$. Stabilire di che tipo sia $\mathcal{C}$, determinandone i punti impropri.

6. **Dall'esame del 15 giugno 2005.** In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, sono assegnati i punti $A=[1,2,1,0,0]$, $B=[0,1,1,0,0]$, $C=[2,0,0,0,1]$ e l'iperpiano β di equazione $x_1 - x_5 = 0$.
   (a) Rappresentare il sottospazio α generato dai punti A,B,C in forma parametrica e in forma implicita (come intersezione di iperpiani).
   (b) Determinare la dimensione dello spazio congiungente α e β e dello spazio intersezione $\alpha\cap\beta$, e stabilire se α e β sono in posizione generale.

7. **Dall'esame del 15 giugno 2005.** Scegliere i parametri k,h nella matrice $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & h\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}$ in modo che la corrispondente proiettività del piano in sé sia un'omologia; determinare il centro, l'asse e la caratteristica di tale omologia.

8. **Dall'esame del 12 settembre 2007.** Enunciare la proposizione duale della proposizione $(\mathcal{P})$.
   $(\mathcal{P})$ Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, due piani α, β in posizione generale hanno come intersezione un punto.
Dimostrare la proposizione $(\mathcal{P})$ oppure la sua duale.
(punti 1 + 4)

9. **Dall'esame del 12 settembre 2007.**. Giustificare la seguente affermazione: dato un qualsiasi triangolo *ABC,* esiste qualche affinità che lo trasforma in un triangolo equilatero *E*, mandando il baricentro di *ABC* nel baricentro di *E*.
(punti 5)
Facoltativo. Usare la proposizione precedente per risolvere il problema: è vero che, tracciate le tre mediane di un triangolo qualsiasi *ABC,* si determinando sei triangoli i cui sei baricentri giacciono su una stessa ellisse?
(3 punti, o la lode)

10. **Dall'esame del 12 settembre 2007.** E' vero o falso che il sottoinsieme del piano affine reale definito dall'equazione

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 6y + 5 = 0$$

è costituito da un solo punto? Motivare la risposta ricorrendo allo studio della conica che è la chiusura proiettiva del sottoinsieme affine considerato. (punti 5)