

13. Birapporto e proiettività di P^1 .

Gli argomenti della lezione del 29 ottobre 2007 si trovano in [Testo] n. 2.1 (omettendo l'osservazione 2.1.7), 2.2, l'enunciato 2.3.1 (senza dimostrazione):

- Il birapporto come coordinata proiettiva
- Definizioni equivalenti di proiettività sulla retta
- Teorema fondamentale delle proiettività sulla retta
- Il teorema di Darboux (senza dimostrazione).

14. Punti uniti di una proiettività di P^1 .

Vedere [Testo] n. 2.2.5, 2.4, 2.5, 2.6 per gli argomenti della lezione del 30 ottobre

- Matrici simili e loro autovalori
- Punti uniti di una proiettività
- Classificazione delle proiettività in P^1 , caratteristica di una proiettività
- Forme canoniche delle proiettività (cenno di dimostrazione)

NOTA. Nel testo ci sono alcuni cambiamenti di notazioni che possono creare inutili dubbi. A pag. 51 e a pag. 58 sono indicate con lo stesso simbolo M due matrici invertibili che non sono esattamente la stessa: a pag. 51 la matrice dell'ultima riga è l'inversa della matrice nell'enunciato del teorema, a pag. 58 la matrice nella dimostrazione è la trasposta di quella nell'enunciato del teorema.

15. Involuzioni. Sottogruppi del gruppo delle proiettività di P^1 .

Vedere [Testo] n. 2.5, 2.6, con esclusione di 2.6.1, 2.4.6 per gli argomenti della lezione del 31 ottobre

- Involuzioni
- Proiettività e forme bilineari.
- Corrispondenze algebriche
- Le proiettività come corrispondenze biunivoche algebriche

Esercizi su proiettività della retta, involuzioni.

1. Esiste qualche proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ che applichi ordinatamente i punti $A = [2,1]$, $B = [1,0]$, $C = [0,1]$, $D = [1,1]$ su

- a) $A' = C$, $B' = A$, $C' = [3,-1]$, $D' = [3,1]$; b) $A' = D$, $B' = C$, $C' = B$, $D' = A$;
- c) $A' = [1,2]$, $B' = [-1,1]$, $C' = [4,1]$, $D' = B$?

In caso affermativo, scrivere delle equazioni che rappresentino queste proiettività.

2. Trovare delle equazioni che rappresentino la proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ che applica i punti $A = [2,1]$, $B = [1,0]$, $C = [1,3]$ ordinatamente sui tre punti $A' = [1,0]$, $B' = [2,1]$, $C' = [7,5]$.

3. E' assegnata la proiettività α di $P^1(\mathbb{R})$ rappresentata, in un dato sistema di riferimento, da $\rho X' = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X$. Trovare le immagini dei punti fondamentali del sistema di riferimento.

Rappresentare α in coordinate non omogenee. Stabilire se esistono punti fissi per α e, nel caso che i punti uniti fossero distinti, determinare il *centro*¹ e la caratteristica² di α .

4. Trovare i punti uniti di ciascuna delle proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ rappresentate, in forma matriciale, da:

$$a) \rho X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X; \quad b) \rho X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X; \quad c) \rho X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X.$$

Nei casi in cui i punti uniti siano distinti e reali, U, V , verificare che il birapporto della quaterna (X, X', U, V) , è costante.

5. Scrivere delle equazioni che rappresentino la proiettività θ di $P^1(\mathbb{R})$ che tiene fissi i punti $A_1 = [1, 0]$, $A_2 = [0, 1]$ e manda $B = [-2, 1]$ in $B' = [2, 1]$. Rappresentare θ in coordinate non omogenee (escludendo il punto A_1) e determinare, se possibile, il suo centro e la sua caratteristica.

6. Determinare la proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ che tiene fissi i punti $A_1 = [1, 0]$, $A_2 = [0, 1]$ e manda $D = [4, 1]$ in $D' = [8, 1]$; rappresentarla anche in coordinate non omogenee (escludendo il punto A_1) e trovare la sua caratteristica.

7. Determinare la proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ per la quale il punto $A_1 = [1, 0]$ è unito ed i punti $B = [-2, 1]$, $C = [0, 1]$ vanno rispettivamente nei punti $B' = [2, 1]$, $C' = [1, 1]$. Rappresentarla anche in coordinate non omogenee (escludendo il punto A_1). Stabilire se si tratta di una proiettività iperbolica o parabolica; nel primo caso, trovarne la caratteristica.

¹ Centro di una proiettività sulla retta è il quarto armonico dopo i punti uniti ed il punto improprio.

² Caratteristica di una proiettività sulla retta reale è il birapporto della quaterna (X, X', U, V) , formata da un punto generico, dalla sua immagine e dai due punti uniti.