

Esercitazione: richiami su sistemi lineari, sottospazi vettoriali

I. Interpretazione geometrica di sistemi lineari in due e tre incognite.

A.1. Determinare il coefficiente k in modo che il sistema $\begin{cases} x + ky = 2 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$ non abbia soluzioni.

A.2. Determinare il coefficiente k in modo che le rette di equazioni $3x - y = 6$, $x + ky = 2$ siano parallele; disegnare le due rette.

B.1. Discutere e risolvere, per i valori di h per cui è possibile, il sistema $\begin{cases} x + 2y = h \\ 4x + 8y = 3 \\ x - 7y = 2 \end{cases}$.

B.2. Per quali valori di h le rette di equazioni $4x + 8y = 3$, $x - 7y = 2$, $x + 2y = h$ sono lati di un triangolo? Per quali valori sono tre rette **distinte** di uno stesso fascio?

C.1. Utilizzare il teorema di Rouché-Capelli per stabilire la condizione di parallelismo tra due rette generiche di equazioni $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$.

C.2. Utilizzare il teorema di Rouché-Capelli per stabilire la condizione di parallelismo tra due piani generici di equazioni $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

II. Sistemi lineari omogenei e sottospazi vettoriali.

1.a. Trovare le autosoluzioni dei sistemi omogenei in tre incognite

$$(i) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (iii) 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \quad (iv) x_2 + x_3 = 0.$$

1.b. L'insieme delle soluzioni di ciascuno dei sistemi considerati in 1.a è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$: determinarne una base e la dimensione.

2.a. Scrivere un sistema lineare omogeneo nelle incognite x_1, x_2, x_3 le cui soluzioni siano tutti e soli i vettori del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(3, 2, 1)$ e $(0, 1, 0)$.

2.b. Come in 2.a, per il sottospazio generato da $(3, 2, 1)$.

3.a. Trovare generatori e dimensione dello spazio delle autosoluzioni dei sistema lineare, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$(i) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

3.b. Scrivere un sistema lineare omogeneo nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 le cui soluzioni siano costituite da tutti e soli i vettori del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato da $(1, 1, 0, 0)$, $(2, 1, 2, 1)$, $(2, 0, 0, 1)$, $(4, 0, 0, 2)$.

3.c. Come in 3.b., per i sottospazi generati da

- (i) $(1, 2, 3, 4)$, $(5, 6, 7, 8)$, $(9, 10, 11, 12)$
- (ii) $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 2, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$
- (iii) $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 1, 0, 0)$