4. La geometria proiettiva sintetica. La dualità.

La geometria proiettiva, costruita come teoria assiomatica, è lo studio di tutte le conseguenze logicamente deducibili (teoremi) o costruibili (definizioni) a partire da:

- i termini primitivi (non definiti) *punti*, *rette, piani*,
- la relazione primitiva di *appartenenza* di punti a rette, di rette a piani
- gli assiomi (o postulati) *grafici* che sono proposizioni riguardanti punti, rette, piani e reciproche appartenenze, accettati come base dei ragionamenti con cui si costruisce la teoria.

Come assiomi della geometria proiettiva si scelgono quelle **proposizioni fondamentali** (riguardanti punti rette piani e le relazioni reciproche di appartenenza) che, nello studio dello spazio ampliato con elementi impropri, si è visto si mantengono valide, allo stesso modo, per elementi propri ed impropri. Dice F. Enriques (Lezioni di geometria proiettiva, §2, pag. 13):

nella Geometria proiettiva (fondata su tali postulati) gli elementi propri ed impropri possono e debbono considerarsi indifferentemente.

Riportiamo ora le proposizioni fondamentali, con qualche modifica di linguaggio, da *Lezioni di geometria analitica* di G. Castelnuovo (parte III, cap. I, n. 122). Come espressamente notato dall'autore, si dice che certe condizioni *individuano* un punto, o una retta, o un piano, quando esse determinano in modo unico quel punto, o quella retta, o quel piano.

a) Due punti individuano una retta a cui essi appartengono (la loro congiungente).	*a') Due piani individuano una retta, che appartiene a entrambi (la loro intersezione).*
b) Tre punti, che non appartengano ad una stessa retta, individuano un piano a cui essi appartengono (il piano che li congiunge).	*b') Tre piani, che non contengano una stessa retta, individuano un punto, che appartiene a tutti e tre (in cui essi si segano).*
c) Un punto ed una retta, che non contenga il punto, individuano un piano (congiungente) a cui entrambi appartengono.	*c') Un piano ed una retta, che non appartenga al piano, individuano un punto (intersezione), che appartiene a entrambi.*
d) Se due punti di una retta appartengono a un piano, la retta appartiene al piano.	*d') Se due piani per una retta contengono un punto, la retta contiene il punto.*
e) Due rette contenenti uno stesso punto appartengono ad uno stesso piano.	*e') Due rette appartenenti ad uno stesso piano passano per uno stesso punto.*

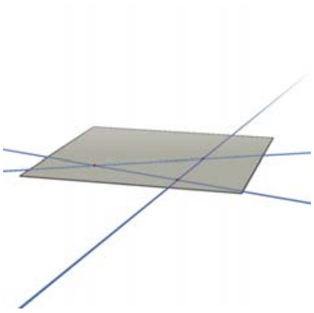
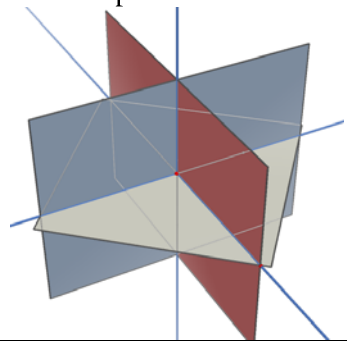
L'aggettivo "*grafici*" che qualifica questi assiomi è pienamente giustificato: **essi consentono di definire univocamente le operazioni di *proiezione e sezione.***

Vale la cosiddetta **legge di dualità**:

ogni assioma grafico si trasforma in un altro degli assiomi grafici se si scambiano tra loro le parole *punto* e *piano*.

Ne segue che da ogni proposizione validamente dedotta dagli assiomi grafici si può ricavarne un'altra – detta *duale* della prima - pure valida, con lo scambio delle parole "punto, piano" mantenendo le relazioni di appartenenza.

Esempi di proposizioni duali (da F. Enriques, Lezioni di geometria proiettiva, §8).
Ricordiamo che si dicono *incidenti* due rette che passano per un punto e giacciono in un piano. Due rette non incidenti si dicono *sghembe.*

Tre punti non appartenenti ad una retta determinano un *triangolo*: figura composta dei tre punti (vertici), delle tre rette determinate da essi due a due (lati), e del piano determinato dai tre punti. 	Tre piani non passanti per una stessa retta determinano un angolo *triedro*: figura composta dei tre piani (facce) , delle tre rette determinate da essi due a due (spigoli) e del punto determinato dai tre piani. 

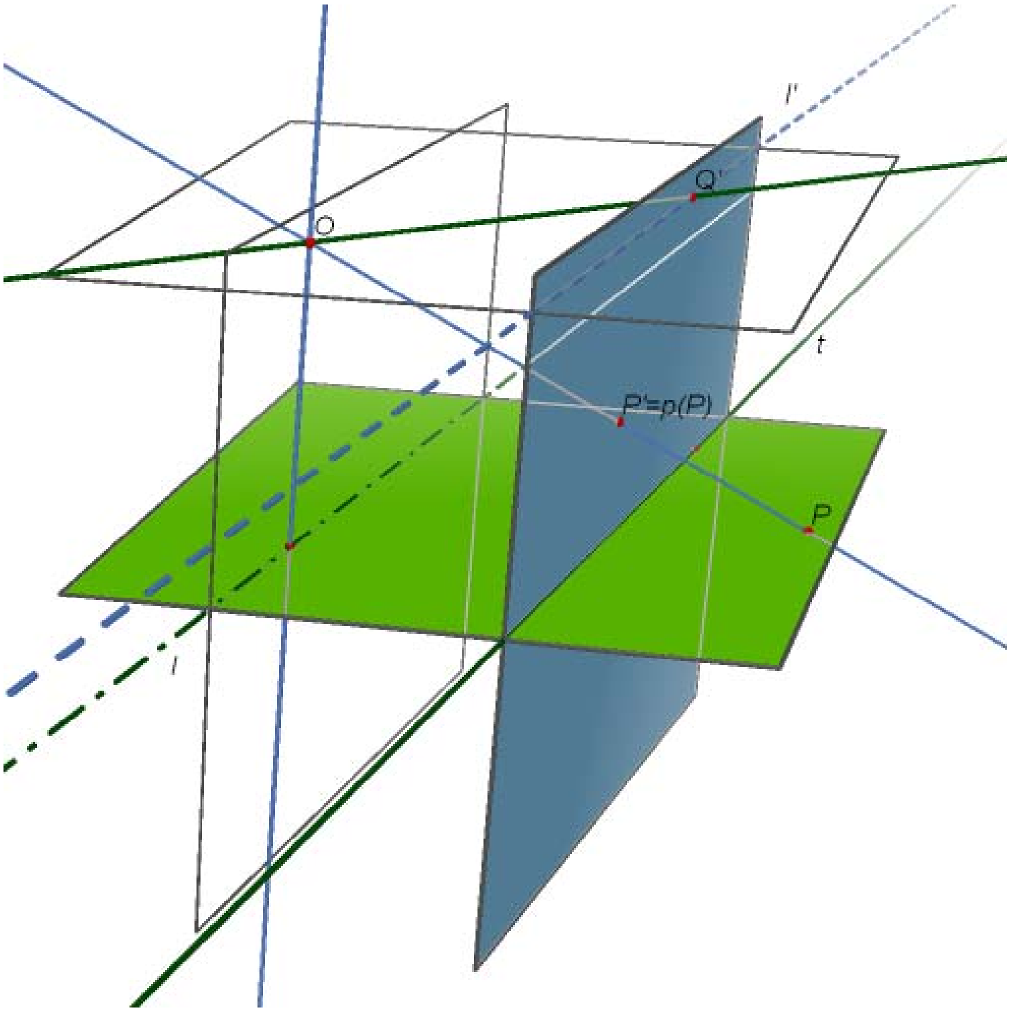
Date due rette sghembe, per un punto fuori di esse passa una retta incidente ad entrambe. Infatti, questa retta si determina come intersezione dei piani che sono individuati dal punto e da ciascuna delle rette.	Date due rette sghembe, in un piano non passante per nessuna di esse vi è una retta incidente alle due rette date. Infatti, questa retta si determina come congiungente i due punti in cui ciascuna retta interseca il piano.

Esercizio.

Nello spazio (della geometria elementare) sono dati due piani α e α', che si incontrano in una retta t, ed un punto O fuori da α e α'.
a) Dimostrare che, se lo spazio è ampliato con gli elementi impropri, allora la proiezione da O di α su α' è un'applicazione bijettiva $p\colon \alpha \to \alpha'$.
b) Detta r_∞ la retta impropria di α, si chiama *retta limite di* α' la retta $l' = p(r_\infty)$. Dimostrare che l' è parallela a t.

Traccia di svolgimento.
a) Per ogni $P\in\alpha$, è ben definita la retta OP, che interseca α' in $P' = p(P)$; infatti, nel caso in cui OP sia parallela ad α' (cioè nel caso in cui P appartenga alla retta l in cui α è tagliato dal piano per O parallelo ad α') allora $p(P)$ è un punto improprio di α', intersezione di α' con una retta parallela ad esso.
Per mostrare che l'applicazione p è surgettiva, e che inoltre ogni punto $Q'\in\alpha'$ è immagine di un solo punto $Q\in\alpha$, basta osservare che se la retta OQ' interseca α, allora Q' è l'immagine di quel (unico) punto di intersezione. Se in particolare la retta OQ' è parallela a α, cioè se Q' appartiene alla retta l' in cui α' è tagliato dal piano per O parallelo ad α, allora Q' è immagine di un punto improprio di α, ed esattamente del punto che individua la direzione di tutte le rette di α parallele alla retta OQ'.

(nell'illustrazione che segue, α e l sono colorati in verde, α', l' in blu)



b) Da quanto appena osservato, si ha che i punti immagine dei punti di r_∞ appartengono alla retta *l'* in cui α' incontra il piano per *O* parallelo ad α. Se la retta $p(r_\infty) = l'$, immagine della retta impropria di α, appartiene ad un piano parallelo ad α, allora è una retta parallela alla retta $t = \alpha\cap\alpha'$.