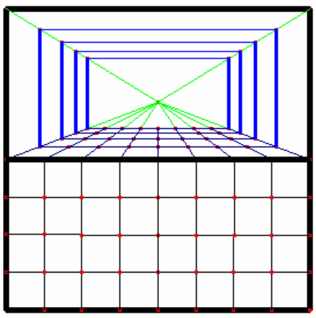
5. Il birapporto.

Un adulto, anche se non esperto in disegno, quando voglia tracciare lo schizzo di un dado abbozza un solo quadrato, o al più due, per rappresentare una faccia verticale e quella opposta, quindi li contorna di parallelogrammi che raffigurano le altre facce; infatti, l'esperienza gli ha insegnato che un quadrato orizzontale non viene visto come un quadrato. Uno dei problemi fondamentali da affrontare nello studio della prospettiva è appunto stabilire quali relazioni intercorrano tra il lato di un quadrato orizzontale ed i lati e gli angoli della sua rappresentazione prospettica, o, più in generale, tra una pavimentazione con piastrelle quadrate e la sua raffigurazione.

Ecco come Catastini e Ghione, in "Le geometrie della visione", presentano (§ 4.1, pag. 70) il problema affrontato da Leon Battista Alberti, il primo a divulgare le regole della prospettiva, nel trattato *De Pictura* (1435).

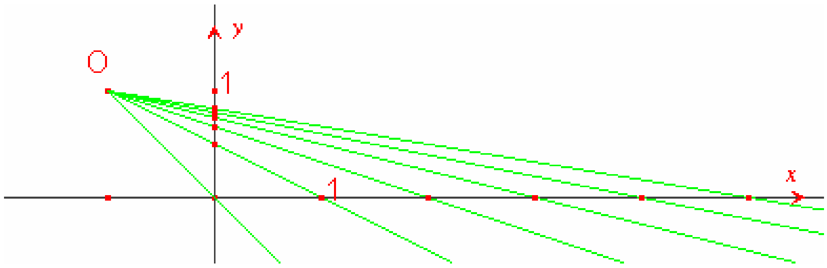
> *Nelle botteghe d'arte per lo più erano in uso accorgimenti poco precisi, a cui Alberti accenna, che si basavano però su una buona idea iniziale: sulla costruzione di un riferimento a scacchiera che desse le "coordinate" per la collocazione degli oggetti sul dipinto. La scacchiera era creata pensando il piano di base come un pavimento a piastrelle quadrate, da riprodurre sul piano del quadro. Le piastrelle venivano definite da due sistemi di rette: le* ***linee di profondità*** *perpendicolari al quadro e le* ***linee traverse*** *perpendicolari a quelle e quindi parallele al quadro.*



Non ci occuperemo del metodo di Leon Battista Alberti, da lui stesso chiamato "metodo ottimo", perché Alberti stabilisce le leggi della "costruzione legittima" ma non ne dà una giustificazione matematica; troveremo, nel seguito, una soddisfacente spiegazione geometrica nell'ambito dello studio dell'omologia, dovuta sostanzialmente a Piero della Francesca. Limitiamoci per il momento a riflettere sulla relazione che intercorre tra un segmento suddiviso in parti uguali (un lato del pavimento a piastrelle quadrate) e la sua proiezione da un punto (l'occhio del pittore) sul quadro.

Stilwell, in "The four pillars of geometry", nel cap. 5 dal titolo "Prospettiva" propone questo **esercizio** (pag. 91):

> *Supponiamo che il pavimento abbia delle righe di piastrelle che incontrano l'asse delle x nei punti di ascissa* $x = 0,1,2,3,\ldots.$ *e che l'artista copi la vista del pavimento su uno schermo trasparente che passa per l'asse delle y, tenendo un occhio fermo nella posizione di coordinate* $(-1,1)$. *Allora la vista in prospettiva dei punti di ascissa* $0,1,2,3,\ldots$ *sull'asse delle x sarà la successione di punti sull'asse delle y mostrata della figura che segue*



Mostrare che la retta da $(-1,1)$ *a* $(n,0)$ *taglia l'asse delle y nel punto di ordinata* $\frac{n}{n+1}$.
Quindi, le immagini prospettiche dei punti x = 0,1,2,3…. *sono i punti y* = 0, ½, 2/3, ¾,……

Infatti, la retta che congiunge il punto $O = (-1,1)$ con $(n,0)$ ha equazione $\frac{x-n}{-1-n} = \frac{y}{1}$; ponendo in questa equazione $x = 0$ si ottiene $y = \frac{n}{n+1}$.

E' quindi evidente che le lunghezze dei segmenti non sono conservate nella proiezione, e neppure i rapporti tra segmenti. Ad esempio, nel caso dell'esercizio, i punti 1, 2, 3 sull'asse delle x sono estremi di due segmenti consecutivi il cui rapporto è 1, mentre le loro immagini, ½, 2/3, ¾ determinano due segmenti consecutivi il cui rapporto è (2/3 −1/2):(3/4−2/3)=(1/6):(1/12)= 2.

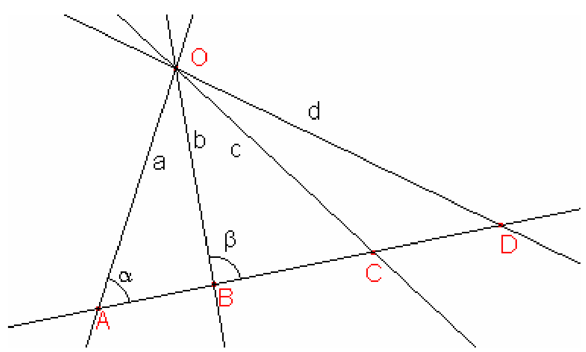
Fu Möbius (1790-1868) a dimostrare che, dati quattro punti allineati A,B,C,D, le operazioni di proiezione e sezione conservano il *rapporto del rapporto* tra quattro dei segmenti che li hanno come estremi, precisamente, il *birapporto* (in inglese, *cross ratio*) definito come il numero

$$\frac{AC}{BC} \bigg/ \frac{AD}{BD} \qquad ([1])$$

Il risultato era già noto a Pappo (Alessandria, circa 290-350 d.C.).

La **dimostrazione dell'invarianza** del birapporto rispetto alle operazioni di proiezione e sezione si può ottenere ricorrendo alla trigonometria.

Consideriamo un punto O fuori della retta di A,B,C,D , e chiamiamo a, b, c, d le rette che proiettano ordinatamente i quattro punti da O ([2]). Indichiamo con α l'angolo che nel triangolo OAC è opposto al lato OC, con β l'angolo opposto a OD del triangolo BOD. Per il teorema dei seni, applicato di volta in volta ai triangoli AOC, AOD, BOC, BOD, si ha:



[1] I simboli AC etc. indicano misure orientate, cioè numeri reali relativi: fissata una orientazione sulla retta dei punti considerati, si ha $AC = -CA$.

[2] Scelta un'orientazione sulla retta AB, la proiezione induce una orientazione nel fascio delle rette per O. Il teorema dei seni rimane valido, anche per triangoli con angoli orientati e lati orientati.

$$\frac{AC}{OC}=\frac{\sin(ac)}{\sin\alpha};\frac{BC}{OC}=\frac{\sin(bc)}{\sin\beta};$$
$$\frac{AD}{OD}=\frac{\sin(ad)}{\sin\alpha};\frac{BD}{OD}=\frac{\sin(bd)}{\sin\beta}$$

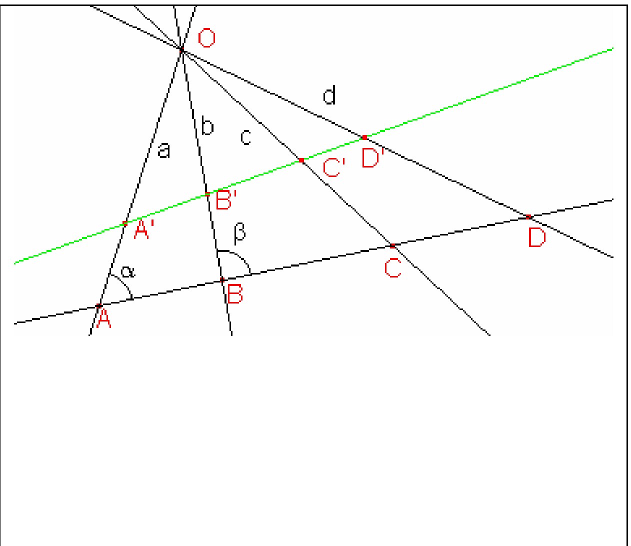
Ne segue:

$$\frac{AC}{BC}\bigg/\frac{AD}{BD}=\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}\bigg/\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

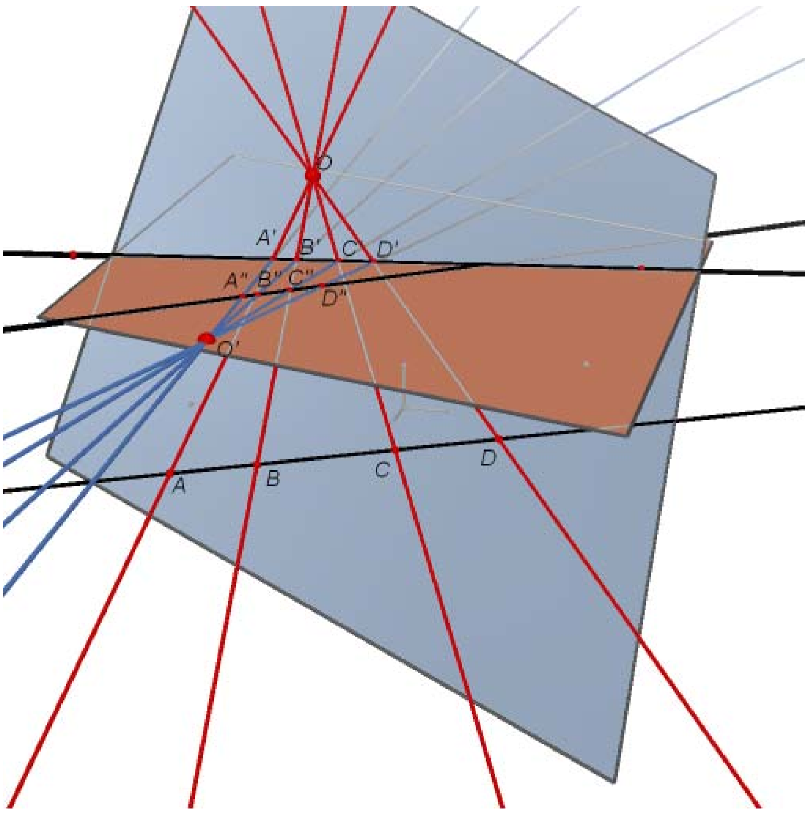
Se si tagliano le rette a,b,c,d con una retta non passante per O, per le intersezioni $A'B'C'D'$ si ha

$$\frac{A'C'}{B'C'}\bigg/\frac{A'D'}{B'D'}=\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}\bigg/\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}=\frac{AC}{BC}\bigg/\frac{AD}{BD}$$

c.v.d.



Quindi, la quaterna A,B,C,D nella figura e le due quaterne ordinate di punti, ottenute per proiezione su rette distinte dai centri O e O', formano tutte lo stesso birapporto.



Se definiamo la geometria proiettiva come lo studio delle proprietà che sono invarianti per proiezione e sezione, possiamo affermare che **sono proprietà proiettive**:

per tre punti:
- l'appartenere ad una retta (essere allineati)

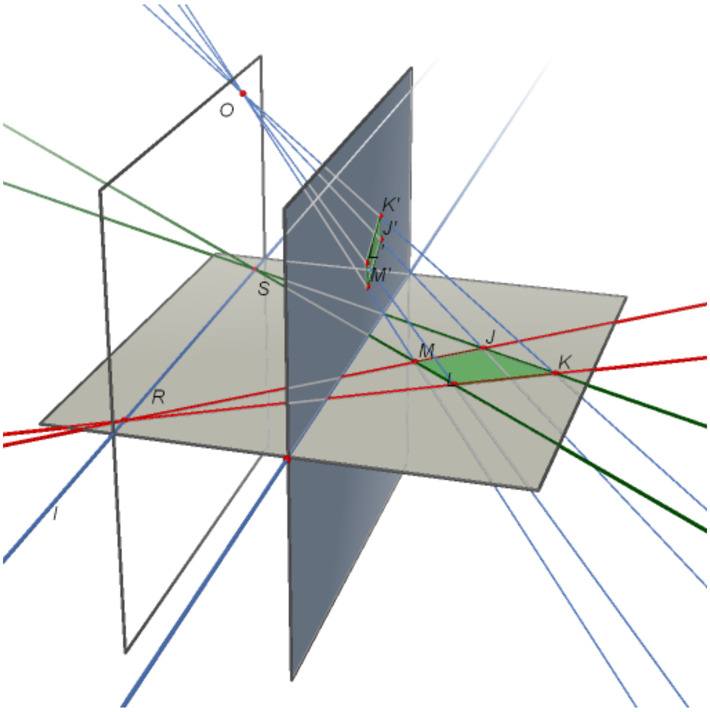
per quattro punti non allineati
- appartenere ad uno stesso piano (individuato da tre di essi)

per una quaterna ordinata di punti allineati
- il loro birapporto.

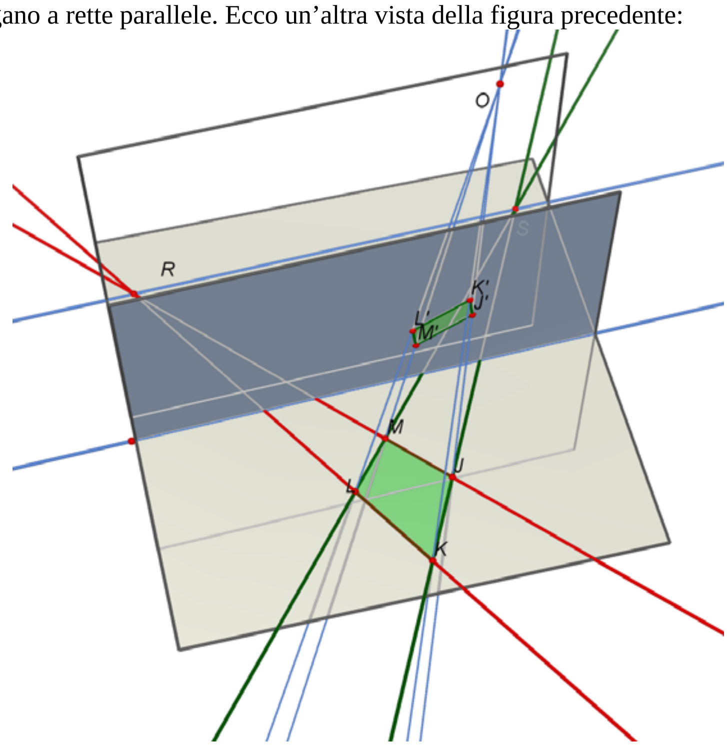
Riprenderemo lo studio del birapporto in seguito, dopo averne ritrovato una definizione indipendente da concetti euclidei (misure, angoli).

Esercizi

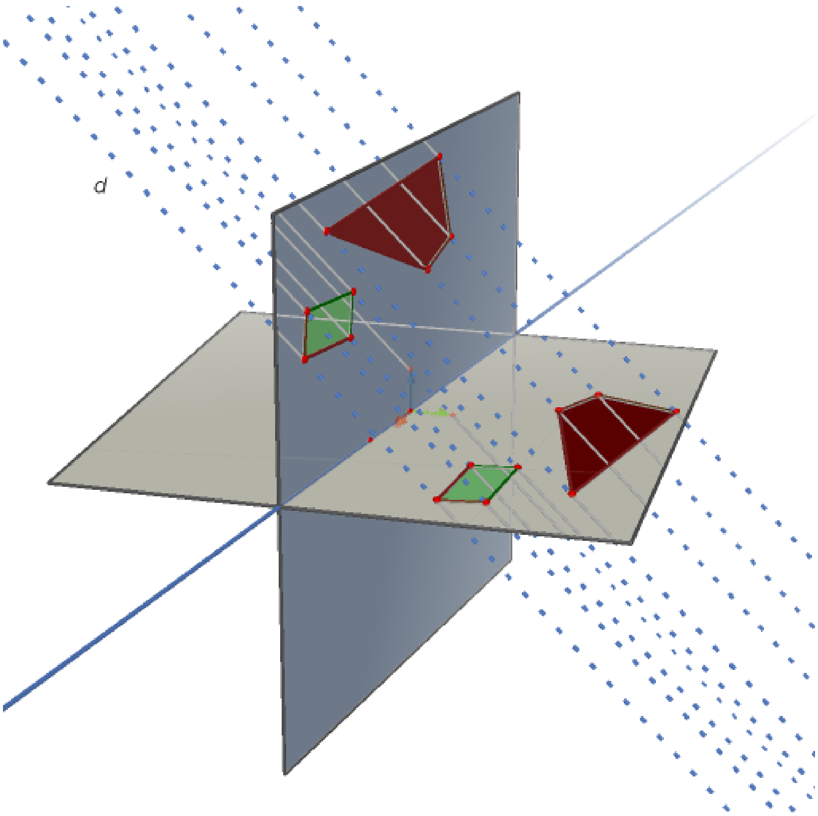
1. Nello spazio ampliato con gli elementi impropri, sono dati due piani α e α', che si incontrano in una retta t, ed un punto O fuori da α e α'. Sia , p: $\alpha \to \alpha'$ la proiezione da O di α su α'. Si chiama *retta limite di* α la retta l la cui proiezione è la retta impropria r'_∞ di α'.
Come bisogna scegliere un quadrilatero $Q \subset \alpha$ perché la sua proiezione $p(Q)$ sia un parallelogrammo?



Bisogna scegliere i lati opposti di Q in modo che si intersechino in due punti della retta limite l, cosicché le proiezioni di due lati opposti appartengano a rette parallele. Ecco un'altra vista della figura precedente:



2. Nello spazio ampliato con gli elementi impropri, sono dati due piani α e α', che si incontrano in retta propria *t*. Fissata una retta *d* che non sia parallela a nessuno dei due piani, si chiami *D* il suo punto improprio. La proiezione da *D* viene detta *proiezione parallela* nella direzione *D* di α su α'. Quali sono le rette limite in questo caso? Come bisogna scegliere un quadrilatero $Q \subset \alpha$ perché la sua proiezione parallela su α' sia un parallelogrammo?



Poiché congiungendo un punto improprio con una retta impropria si ottiene il piano improprio dello spazio, le rette limite sono le rette intersezione di ciascun piano con il piano improprio, cioè sono le rette improprie dei due piani. Nella proiezione parallela si conserva il parallelismo, quindi *Q* deve essere un parallelogrammo perché la sua immagine sia un parallelogrammo.

3. Che relazione c'è tra un quadrilatero $Q \subset \alpha$ e la sua proiezione parallela su un piano parallelo ad α ?

Sono ottenuti l'uno dall'altro con una traslazione nella direzione di proiezione, quindi sono uguali!

4. Perché gli assiomi grafici rendono possibili le operazioni di proiezione e sezione?

Gli assiomi grafici garantiscono che esista una sola retta che unisce il centro di proiezione con un punto fissato e che esista una sola intersezione di questa retta con il piano su cui si proietta (purché non passante per il centro di proiezione).

5. In un piano, si consideri un pentagono inscritto in una circonferenza. Quali proprietà di questa configurazione sono invarianti per proiezione e sezione?

Sono invarianti: il numero dei vertici del poligono e l'appartenenza di questi vertici **ad una conica**. Infatti, il pentagono si trasforma in un pentagono inscritto in una conica non degenere (potrebbe essere una ellisse, una iperbole, una parabola).