

Compito a casa n. 4

Scrivere la proposizione duale della proposizione A.

Proposizione A:

in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, se un sottospazio, σ , di dimensione due (un piano) ed un sottospazio, r , di dimensione uno (una retta) sono in posizione generale, allora per ogni retta s contenuta in σ esiste un solo iperpiano che contiene entrambe r ed s .

Dimostrare la proposizione A e la sua duale per via sintetica.

Dimostrare la proposizione A per via analitica, scegliendo il sistema di riferimento proiettivo in modo conveniente. Perché è lecito supporre che σ abbia equazioni $x_1 = x_2 = 0$ e che r abbia equazioni $x_3 = x_4 = x_5 = 0$?

Traccia di soluzione.

Proposizione A	Proposizione duale.
In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, se un sottospazio, σ , di dimensione due (un piano) ed un sottospazio, r , di dimensione uno (una retta) sono in posizione generale, allora per ogni retta s contenuta in σ esiste un solo iperpiano che contiene entrambe r ed s .	In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, se un sottospazio, s , di dimensione uno (una retta) ed un sottospazio, R , di dimensione due (un piano) sono in posizione generale, allora per ogni piano S che contenga s esiste un solo punto che appartiene a entrambi R ed S .
Dim. Dall'ipotesi che σ, r siano in posizione generale segue: $\dim \sigma \cap r = -1$, $\dim J(\sigma, r) = 4$. Se s è un sottospazio, con $s \subset \sigma$, anche $\dim s \cap r = -1$, quindi dalla formula di Grassmann, avendosi $\dim s = \dim r = 1$, segue: $\dim J(s, r) = 1 + 1 - (-1) = 3$. L'iperpiano $J(s, r)$ è univocamente determinato come il minimo sottospazio che contiene s ed r .	Dim. Dall'ipotesi che s, R siano in posizione generale segue: $\dim s \cap R = -1$, $\dim J(s, R) = 4$. Se S è un sottospazio, con $S \supset s$, anche $\dim J(S, R) = 4$, quindi dalla formula di Grassmann, avendosi $\dim S = \dim R = 2$, segue: $\dim S \cap R = 2 + 2 - 4 = 0$. Il punto $S \cap R$ è univocamente determinato come sottospazio intersezione di R, S .

Dimostrazione della proposizione A per via analitica.

Poiché le proprietà da dimostrare non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento, è lecito prendere due generatori indipendenti di r come punti fondamentali del riferimento $A_1 = [1, 0, 0, 0, 0]$, $A_2 = [0, 1, 0, 0, 0]$, e tre generatori indipendenti di σ come restanti punti fondamentali A_3, A_4, A_5 . Con questa scelta, σ ha le equazioni $x_1 = x_2 = 0$ ed r $x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

Una qualsiasi retta s contenuta in σ è generata da due punti $P = [0, 0, a, b, c]$, $Q = [0, 0, a', b', c']$, con

$$(*) \quad \text{rango} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

I quattro punti indipendenti A_1, A_2, P, Q generano l'iperpiano di equazione

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a' & b' & c' \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & a' & b' & c' \end{pmatrix} = (bc' - b'c)x_3 - (ac' - a'c)x_4 + (ab' - b'c)x_5 = 0.$$

L'ipotesi (*) garantisce che l'equazione trovata abbia almeno un coefficiente diverso da zero, e quindi definisca un (solo) iperpiano. Possiamo concludere che per ogni scelta dei punti P, Q esiste l'iperpiano che contiene r e la retta s di P e Q .

c.v.d.