Esempio di soluzione degli esercizi del Compito a casa n. 7

1. Nel piano proiettivo sono dati una conica $\mathcal{C}$ non degenere ed un punto *P* che non appartiene a $\mathcal{C}$ e tale che la sua polare (rispetto a $\mathcal{C}$) intersechi $\mathcal{C}$ in due punti distinti *A, B*.
Utilizzare la legge di reciprocità per dimostrare che le rette che congiungono *P* con *A* e con *B* sono tangenti a $\mathcal{C}$.

Poiché i punti della conica sono autoconiugati, A giace sulla propria polare, la quale - come è stato dimostrato - incontra la conica solo in A: è la retta tangente alla conica in A.
Bisogna quindi far vedere che la retta che congiunge P con A è la polare di A. Per la legge di reciprocità, poiché per ipotesi A giace sulla polare di P, la sua polare passa per P; inoltre, essendo A autoconiugato, la sua polare passa per A: quindi questa polare coincide con la retta congiungente P con A.
Lo stesso vale per B.

2. Nel piano affine è assegnata la conica $\mathcal{I}$ di equazione $x^2+4xy+3y^2-10x=0$. Determinarne il centro e utilizzare l'esercizio precedente per trovare i suoi asintoti. Verificare che gli asintoti sono gli elementi uniti nella involuzione dei diametri coniugati di $\mathcal{I}$.
Il centro della conica I è il punto la cui polare ha le coordinate duali $[0,0,1]$ *della retta impropria, perciò è il punto determinato dalla soluzione del sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risolvendo il sistema, si trova che il centro di I è (-15,10).
Poiché gli asintoti sono le tangenti condotte dal centro alla conica, per l'esercizio 1 *essi coincidono con le rette congiungenti il centro con i punti comuni alla conica e alla polare del centro, la retta impropria. Le intersezioni di I con la retta impropria sono determinate dal sistema*

$$\begin{cases} x_3=0 \\ {x_1}^2+4x_1x_2+3{x_2}^2-10x_1x_3=0 \end{cases} \text{cioè} \quad (*) \quad \begin{cases} x_3=0 \\ {x_1}^2+4x_1x_2+3{x_2}^2=0 \end{cases};$$

risultano essere $[-3,1,0]$, $[-1,1,0]$.
Le rette con queste due direzioni appartengono ai fasci impropri $x+3y+k=0,\quad x+y+h=0$. *Le rette di questi fasci che passano per il centro di I (gli asintoti) sono*

$$x+3y-15=0,\quad x+y+5=0.$$

Per trovare l'equazione dell'involuzione dei diametri coniugati, cominciamo con determinare il diametro che è polare del punto improprio $[a,b,0]$:

$$(x,y,1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}=(x,y,1)\begin{pmatrix} a+2b \\ 2a+3b \\ -5a \end{pmatrix}=a(x+2y-5)+b(2x+3y)=0.$$

Questo diametro è coniugato del diametro polare di $[a',b',0]$ *se contiene il punto improprio* $[a',b',0]$*:*

$$a(a'+2b')+b(2a'+3b')=0.$$

L'equazione dell'involuzione è dunque

$$aa'+2(ab'+a'b)+3bb'=0.$$

Gli elementi uniti si trovano ponendo $a=a'$, $b=b'$ *nella precedente equazione; si ottiene così l'equazione omogenea di secondo grado che compare nel sistema* $(*)$ *di sopra, con la sola sostituzione di* a *al posto di* x_1 *e di* b *al posto di* x_2*:*

$$a^2+4ab+3b^2=0.$$