Geometria euclidea, affine e proiettiva

Prova scritta del 4 luglio 2008

Tempo a disposizione: 3 ore. Si possono consultare gli appunti e il libro di testo.

1. Nello spazio ordinario, sono dati due piani α e α', che si incontrano in una retta *t*, ed una circonferenza $C \subset \alpha$. Si vuole proiettare *C* su α' da un punto *O* (che non appartenga né ad α né ad α') in modo che la curva proiezione sia una parabola. Spiegare con quali criteri si debba scegliere il centro di proiezione *O* .

2. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi: *S* di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$ ed *S'* di equazioni $\begin{cases} x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$. Determinare, scrivendone delle equazioni cartesiane e delle equazioni parametriche, i sottospazi intersezione $S \cap S'$ e congiungente $J(S,S')$; stabilire se *S*, *S'* sono in posizione generale.

3. Enunciare la proposizione duale di:
date in $\mathbb{P}^3$ tre rette *a*,*b*,*c* a due a due sghembe tra loro, per ogni punto $A \in a$ passa una retta che interseca sia *b* che *c*.
Dimostrare, a scelta, o la proposizione data o la duale.

4. Scrivere delle equazioni che rappresentino tutte le involuzioni θ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che tengono fisso il punto A_1 = [1,0]. Una tra queste, θ^, manda *U* = [1,1] in *U'* = [2,1]; rappresentare θ^ in coordinate non omogenee (escludendo il punto A_1), determinare l'altro suo punto unito, e stabilire quale tipo di affinità (omotetia, eccetera) si ottiene quando si ristringe θ^ all'insieme complementare del punto A_1 in $\mathbb{P}^1$.

5. Sia ω: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'omologia, non speciale, che ha come asse la retta $x_1 = x_2$ e tale che

$$\omega([1,0,1]) = [0,1,1];\ \omega([2,0,1]) = [0,2,1].$$

Trovare il centro di ω. (Si noti: non sono richieste le equazioni di ω).
Senza fare calcoli, stabilire se ω induca o no un'affinità sul piano affine identificato con l'insieme complementare, in $\mathbb{P}^2$, della retta $x_3 = 0$.

6. Nel piano affine reale è assegnata la famiglia di coniche di equazione (dipendente dal parametro *k*)

$$x^2 + 2kxy + (k-1)y^2 + 4x - 2ky = 0.$$

a) Verificare che tutte le coniche della famiglia sono coniche a centro;
b) determinare e studiare la conica *K* per la quale il centro ha le coordinate (–2,0);
c) nella polarità indotta da *K*, quale è il diametro coniugato al diametro $y = x - 2$?