Geometria euclidea, affine e proiettiva

Prova scritta del 10 dicembre 2007

Tempo a disposizione: 3 ore. Si possono consultare gli appunti e il libro di testo.

1. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sono dati il sottospazio S di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_5 = 0 \end{cases}$ e l'iperpiano S' di equazione $x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$. Determinare, scrivendone delle equazioni cartesiane e delle equazioni parametriche, i sottospazi intersezione $S \cap S'$ e congiungente $J(S,S')$; stabilire se S, S' sono in posizione generale.

2. Enunciare la proposizione duale della seguente:

> dati in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tre punti non allineati, esistono tre rette distinte, ognuna delle quali contiene due dei punti assegnati.

Dimostrare, a scelta, o la proposizione data o la duale.

Nel piano proiettivo reale, sono assegnati: la retta r di equazione $x_1 + 2x_3 = 0$, il punto $P = [1,0,0]$, la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2 = 0$.

3. Esiste un triangolo autopolare rispetto a $\mathcal{C}$ che abbia un vertice coincidente con P ed un altro vertice su r ? Se esiste, determinare i suoi vertici.

4. Nel piano affine che si ottiene considerando come retta all'infinito la retta di equazione $x_3=0$, sia Γ la conica di cui $\mathcal{C}$ è la chiusura proiettiva. Trovare i punti impropri di Γ, dedurne che tipo di conica affine sia Γ e, se possibile, determinare il centro di Γ.

5. Si consideri la proiettività φ: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ rappresentata, nelle coordinate affini (cioè, non omogenee) x, x', dall'equazione bilineare

$$4xx' + x + 2x' - 1 = 0\,.$$

Determinare i punti fissi e la caratteristica di φ.

6. Sia α l'affinità piana di equazioni

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

e sia α^* la proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di cui α è la restrizione al sottoinsieme definito dalla condizione $x_3 \neq 0$.

a) Trovare i punti uniti di α e i punti uniti di α^*.
b) Mostrare che α^* è involutoria.
c) Stabilire se α sia una isometria;
d) nel caso che α sia una isometria, quale tipo di isometria?