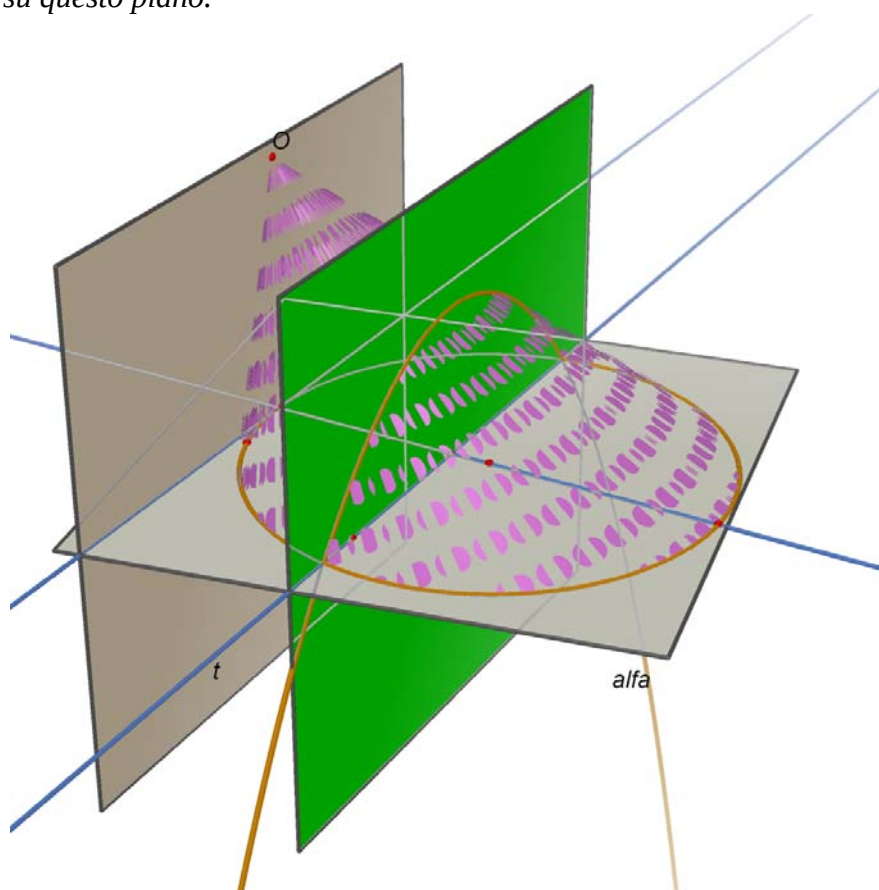


Osservazioni sulla prova scritta di Geometria euclidea, affine e proiettiva

4 luglio 2008

1. Nello spazio ordinario, sono dati due piani α e α' , che si incontrano in una retta t , ed una circonferenza $C \subset \alpha$. Si vuole proiettare C su α' da un punto O (che non appartenga né ad α né ad α') in modo che la curva proiezione sia una parabola. Spiegare con quali criteri si debba scegliere il centro di proiezione O .

Occorre scegliere O in modo che un punto della circonferenza abbia come immagine un punto all'infinito di α' , e la tangente alla circonferenza in quel punto abbia come immagine la retta all'infinito di α' . Poiché si è dato il nome di “retta limite” alla retta che ha come immagine la retta impropria, si tratta dunque di prendere come retta limite una tangente a C . Si ricordi inoltre che la retta limite è parallela a t . Basta dunque scegliere una delle due tangenti a C parallele a t , condurre il piano per questa retta che è parallelo a α' e prendere O a piacere su questo piano.



2. In $P^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi: S di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$ ed S' di equazioni $\begin{cases} x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$. Determinare, scrivendone delle equazioni cartesiane e delle equazioni parametriche, i sottospazi intersezione $S \cap S'$ e congiungente $J(S, S')$; stabilire se S, S' sono in posizione generale.

Risolvendo il sistema lineare omogeneo formato dalle quattro equazioni si trova che i due sottospazi, entrambi di dimensione uguale a 2, hanno in comune un solo punto, $[0,0,1,0,0]$. Dalla formula di Grassmann si ricava che lo spazio congiungente è P^4 . I due piani sono quindi in posizione generale.

3. Enunciare la proposizione duale di:

date in P^3 tre rette a, b, c a due a due sghembe tra loro, per ogni punto $A \in a$ passa una retta che interseca sia b che c .

Dimostrare, a scelta, o la proposizione data o la duale.

Si vedano gli appunti del corso del corrente anno accademico, settimana 22-28 ottobre 2007, esercizi sulla dualità 1.c, 2.c

http://www.mat.unical.it/~dapri/materiali/Euclaffpro07_08/2228ott.pdf

4. Scrivere delle equazioni che rappresentino tutte le involuzioni θ di $P^1(R)$ che tengono fisso il punto $A_1 = [1,0]$. Una tra queste, $\theta^\wedge$, manda $U = [1,1]$ in $U' = [2,1]$; rappresentare $\theta^\wedge$ in coordinate non omogenee (escludendo il punto A_1), determinare l'altro suo punto unito, e stabilire quale tipo di affinità (omotetia, eccetera) si ottiene quando si restringe $\theta^\wedge$ all'insieme complementare del punto A_1 in P^1 .

Per il teorema di caratterizzazione delle involuzioni (vedi Beltrametti, Carletti, Gallarati, Monti Bragadin, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Bollati Boringhieri 2002, Proposizione 2.5.2, pag. 60) le matrici associate alle involuzioni θ hanno la traccia uguale a zero. Poiché il punto $[1,0]$ ha come corrispondente se stesso, la prima colonna di queste matrici è un elemento della classe di equivalenza di $(1,0)$. Le involuzioni θ sono rappresentate quindi da

$$\rho \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

con $\alpha \neq 0$. Imponendo che U vada in U' si ottengono le equazioni di $\theta^\wedge$,

$$\rho \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ ovvero } \begin{cases} \rho x'_1 = x_1 - 3x_2 \\ \rho x'_2 = -x_2 \end{cases}.$$

Ponendo come al solito $x' = x'_1/x'_2$, $x = x_1/x_2$, si ottiene l'equazione in coordinate affini

$$x' = -x + 3,$$

che rappresenta un'affinità (si veda Beltrametti etc., 2.4.6, 2.6.7), nella quale è unito il punto $P = 3/2$. Più precisamente, l'affinità indotta da $\theta^\wedge$ è la simmetria centrale di centro P .

5. Sia $\omega: P^2(R) \rightarrow P^2(R)$ l'omologia, non speciale, che ha come asse la retta $x_1 = x_2$ e tale che $\omega([1,0,1]) = [0,1,1]$; $\omega([2,0,1]) = [0, 2,1]$.

Trovare il centro di ω . (Si noti: non sono richieste le equazioni di ω).

Senza fare calcoli, stabilire se ω induca o no un'affinità sul piano affine identificato con l'insieme complementare, in P^2 , della retta $x_3 = 0$.

Il centro (punto unito isolato) di un'omologia piana (appunti del corso, settimana 12-17 novembre 2007, n. 21) ha la proprietà di essere allineato con ogni punto e la rispettiva immagine; in questo caso, poiché la retta che unisce $[1,0,1]$ con la sua immagine ha equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, e la retta di $[2,0,1]$ e la sua immagine è $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, il centro è il

punto $[1, -1, 0]$, comune alle due rette. Si tratta di un punto appartenente alla retta impropria. Poiché le rette per il centro di un'omologia sono unite, possiamo concludere che la retta impropria ha come corrispondente se stessa, e quindi che ω induce un'affinità. Per controllo, può essere istruttivo passare alle coordinate non omogenee e verificare che l'affinità è un'isometria, precisamente la simmetria ortogonale rispetto alla retta $x = y$.

6. Nel piano affine reale è assegnata la famiglia di coniche di equazione (dipendente dal parametro k)

$$x^2 + 2kxy + (k-1)y^2 + 4x - 2ky = 0.$$

- a) Verificare che tutte le coniche della famiglia sono coniche a centro;
- b) determinare e studiare la conica K per la quale il centro ha le coordinate $(-2, 0)$;
- c) nella polarità indotta da K , quale è il diametro coniugato al diametro $y = x - 2$?

a) Poiché $A_{33} = k-1-k^2$ non si annulla per valori reali di k , la famiglia non contiene parabole.
 b) Imponendo che il sistema che determina il centro (vedi Beltrametti etc., n. 6.11) sia soddisfatto da $(-2, 0)$, si trova che deve essere $k = 0$; la conica K è pertanto l'iperbole di equazione

$$x^2 - y^2 + 4x = 0.$$

Essa interseca la retta impropria nei punti di coordinate omogenee $[1, \pm 1, 0]$; i suoi asintoti sono le rette di equazioni $x \pm y - 2 = 0$.

c) Poiché il diametro di equazione $y = x - 2$ è un asintoto, cioè una tangente alla conica K , esso è autoconiugato (il suo polo è il punto di contatto con K).