Gli esercizi dell'esame del 10 dicembre 2007

1. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sono dati il sottospazio *S* di equazioni cartesiane $\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_5 = 0 \end{cases}$ e l'iperpiano *S'* di equazione $x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$. Determinare, scrivendone delle equazioni cartesiane e delle equazioni parametriche, i sottospazi intersezione *S*∩*S'* e congiungente *J*(*S*,*S'*); stabilire se *S*, *S'* sono in posizione generale.

Le equazioni cartesiane dello spazio intersezione *S*∩*S'* sono $\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_5 = 0 \\ x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$; risolvendo il sistema si ricavano le equazioni parametriche di *S*∩*S'*, nei parametri α, β

$$x_1 = 2\alpha,\ x_2 = -3\beta,\ x_3 = 3\alpha - \beta,\ x_4 = \alpha,\ x_5 = \beta.$$

Lo spazio *S*∩*S'* è dunque la retta che congiunge i punti *A* =[2,0,3,1,0], *B* = [0,–3,1,0,1].

Ricavando, dalle equazioni cartesiane, le equazioni parametriche di *S*, nei parametri λ μ ν

$$x_1 = 2\mu,\ x_2 = -3\nu,\ x_3 = \lambda,\ x_4 = \mu,\ x_5 = \nu,$$

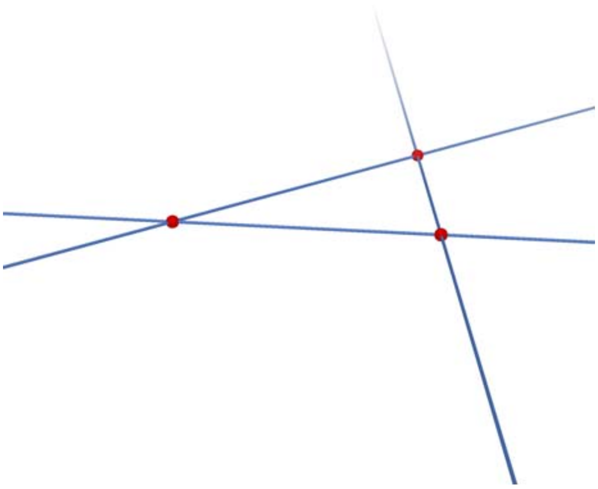
notiamo che si può costruire una famiglia di generatori indipendenti del sottospazio *S* aggiungendo ad *A* e *B* il punto *C* = [0,0,1,0,0].
Per determinare lo spazio *J*(*S*,*S'*), congiungente di *S* ed *S'*, *potremmo* cercare 4 punti indipendenti che generino *S'* e aggiungerli ad *A*,*B*,*C* per ottenere una famiglia di *J*(*S*,*S'*); ma possiamo evitare calcoli superflui se osserviamo che lo spazio congiungente, dovendo contenere l'iperpiano *S'*, o coincide con *S'* oppure è lo spazio $\mathbb{P}^4$. Poiché il punto *C* non verifica l'equazione di *S'*, possiamo concludere che lo spazio *J*(*S*,*S'*) contiene propriamente *S'*, quindi coincide con $\mathbb{P}^4$.

I due sottospazi *S*, di dimensione uguale a 2, ed *S'*, di dimensione uguale a 3, hanno come intersezione uno spazio di dimensione 1 e come congiungente lo spazio ambiente; secondo la definizione di posizione generale, poiché la loro intersezione ha la dimensione minima compatibile con la formula di Grassmann, essi sono in posizione generale.

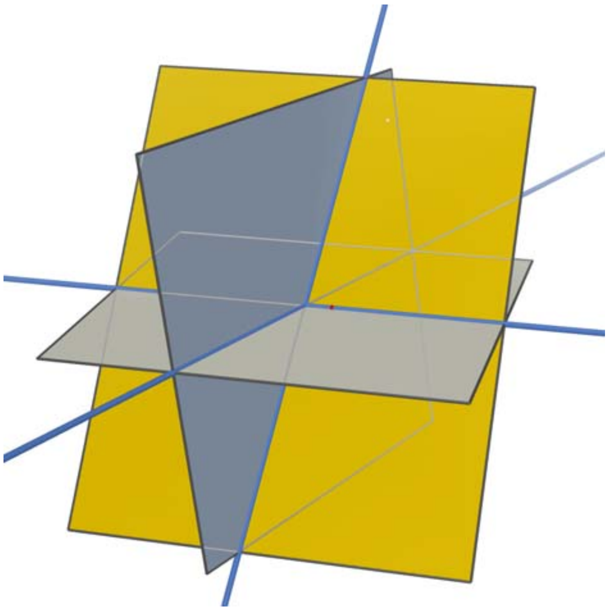
2. Enunciare la proposizione duale della seguente:
dati in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tre punti non allineati, esistono tre rette distinte, ognuna delle quali contiene due dei punti assegnati.
Dimostrare, a scelta, o la proposizione data o la duale.

Scriviamo a sinistra la proposizione data e la sua dimostrazione, a destra la proposizione e la dimostrazione duali.

Dati in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tre punti non allineati, esistono tre rette distinte, ognuna delle quali contiene due dei punti assegnati.	Dati in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tre piani non passanti per la stessa retta, esistono tre rette distinte, ognuna delle quali giace in due dei piani assegnati.



Dimostrazione.
Ogni coppia di punti determina una retta che li congiunge; poiché i tre punti non sono allineati, le tre rette, che li congiungono a due a due, sono distinte.



Dimostrazione.
Ogni coppia di piani determina una retta, la loro intersezione; poiché i tre piani non passano per una stessa retta, le tre rette, in cui essi si tagliano a due a due, sono distinte.

Nel piano proiettivo reale, sono assegnati: la retta *r* di equazione $x_1 + 2\,x_3 = 0$, il punto $P = [1,0,0]$, la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2 = 0$.

3. Esiste un triangolo autopolare rispetto a $\mathcal{C}$ che abbia un vertice coincidente con *P* ed un altro vertice su *r* ? Se esiste, determinare i suoi vertici.

Un triangolo autopolare con un vertice in *P* ha gli altri due vertici sulla retta polare di *P*, che chiamiamo *p*.
Se inoltre un vertice deve appartenere alla retta *r* , il triangolo è completamente determinato: i suoi vertici sono *P*, $Q = r \cap p$ e il punto *R* che è il polo della retta di *P* e *Q* ; per la legge di reciprocità, *R* è l'intersezione di *p* con la polare di *Q*.
Si trova che *p* ha l'equazione $x_1 - 3x_2 = 0$, *Q* ha coordinate [6,2,–3], la polare di *Q* ha equazione $6x_2 + x_3 = 0$, $R = [3,1,-6]$.

4. Nel piano affine che si ottiene considerando come retta all'infinito la retta di equazione $x_3 = 0$, sia Γ la conica di cui $\mathcal{C}$ è la chiusura proiettiva. Trovare i punti impropri di Γ, dedurne che tipo di conica affine sia Γ e, se possibile, determinare il centro di Γ.

I punti impropri di $\mathcal{C}$ si trovano risolvendo il sistema $\begin{cases} x_1^2 - 6x_1x_2 = x_1(x_1 - 6x_2) = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

Poiché $\mathcal{C}$ passa per i due punti impropri distinti [0,1,0] e [6,1,0], ed è non degenere, è un'iperbole. Il suo centro si può trovare come intersezione delle polari di due punti impropri a piacere, per esempio degli asintoti (polari di [0,1,0] e di [6,1,0]); si trova che il centro è il punto di coordinate affini (0,0).

5. Si consideri la proiettività φ: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ rappresentata, nelle coordinate affini (cioè, non omogenee) *x, x'*, dall'equazione bilineare

$$4xx' + x + 2x' - 1 = 0\,.$$

Determinare i punti fissi e la caratteristica di φ.

Ponendo $x = x'$ si trova $4x^2 + 3x - 1 = 0$. I punti uniti hanno le coordinate –1 e ¼.

Per definizione, la caratteristica è il birapporto della quaterna formata dai due punti fissi e da una qualunque coppia di punti corrispondenti nella proiettività (si dimostra infatti che tale birapporto è costante, al variare del punto sulla retta proiettiva).
Dall'equazione di φ

$$x' = \frac{1-x}{4x+2}$$

ponendo per esempio $x = 0$ si ricava $x' =$ ½ , e quindi si trova

$$\mathcal{R}\,(-1,1/4,0,1/2) = \frac{1(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})}{-\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+1)} = -\frac{2}{3}.$$

Come è noto, a seconda dell'ordine in cui si considerano i due punti uniti, si ottiene per la caratteristica o un valore o il suo reciproco.

La caratteristica può essere calcolata anche utilizzando il teorema secondo cui essa è data dal rapporto degli autovalori di una matrice associata a φ. Usiamo questo metodo per verificare che il risultato ottenuto sopra è esatto.
L'equazione caratteristica di φ è

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0\,;$$

gli autovalori sono quindi 3 e –2, quindi si può prendere per la caratteristica o il valore –2/3 o il reciproco.

6. Sia α l'affinità piana di equazioni

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

e sia α* la proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di cui α è la restrizione al sottoinsieme definito dalla condizione $x_3 \neq 0$.

a) Trovare i punti uniti di α e i punti uniti di α*.
b) Mostrare che α* è involutoria.
c) Stabilire se α sia una isometria;
d) nel caso che α sia una isometria, quale tipo di isometria?

a) Ponendo $x = x'$, $y = y'$ nelle equazioni di α si ottiene l'unica equazione $x + y = 0$. Sono uniti perciò tutti i punti di una retta. La proiettività associata α*, avendo una retta di punti uniti, è una omologia.
Passando alle coordinate omogenee, si ottiene l'equazione matriciale di α*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica risulta essere

$$(1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0;$$

all'autovalore doppio è associata la retta di punti uniti già trovata, all'autovalore semplice -1 è associato il punto unito [1,1,0], che non appartiene all'asse dell'omologia. Quindi, α^* è una omologia non speciale.

b) Direttamente: la proiettività $(\alpha^*)^2$ coincide con l'identità:

$$[x_1,x_2,x_3] \to [-x_2,-x_1,x_3] \to [x_1,x_2,x_3].$$

Oppure, si può osservare α^* è una omologia con caratteristica (data dal rapporto degli autovalori) uguale a -1 e ricordare che un'omologia con caratteristica -1 è involutoria: infatti, essa induce su ciascuna delle rette passanti per il centro una proiettività che, avendo caratteristica uguale a -1, è una involuzione.

c) Basta verificare che la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale per stabilire che α è una isometria.

d) Poiché det $A = -1$, α è una isometria non diretta. Avendo già stabilito che α tiene uniti tutti i punti della retta di equazione $x + y = 0$, si può concludere che α è la riflessione rispetto a $x + y = 0$.

Nel disegno qui sotto, sono rappresentati due triangoli che si corrispondono in questa riflessione, e sono tratteggiate le rette che congiungono vertici corrispondenti. Esse sono rette unite; hanno la direzione del punto improprio che è centro dell'omologia α^*.