

Geometria analitica e algebra lineare

Prova scritta del 10 settembre 2012

Nome e cognome _____ n. matricola _____

Scrivere nome e cognome **in testa ad ogni foglio**. **Consegnare questo foglio**. La durata della prova è tre ore; è consentito tenere sul banco un solo foglio di appunti personali. **Risposte prive di spiegazioni NON sono sufficienti.**

1. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 , si considerino i sottoinsiemi A_h , per $h \in \mathbb{R}$, definiti da

$$A_h = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = h x_2, x_3 + h = x_4 + 2\}.$$

Stabilire se, fissato h , un sottoinsieme A_h sia un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 ; nei casi affermativi, determinare una base e la dimensione del sottospazio.

(punti: 4)

2. Stabilire se l'applicazione $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y+z \\ 2x+3y+z \\ x+y\cos(2)+z/2 \end{pmatrix}$ è lineare; in caso

affermativo, scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica. Giustificare brevemente le risposte alle seguenti domande:

- T è un isomorfismo?
- C'è qualche vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ la cui immagine $T(\mathbf{v})$ sia uno dei vettori della base canonica?
- Come va scelta la componente α del vettore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ \alpha \\ 1+2\cos(2) \end{pmatrix}$ affinché \mathbf{u} abbia controimmagini in T ?

Per quel valore di α , determinare l'insieme $T^{-1}(\mathbf{u})$ delle controimmagini di \mathbf{u} .

(punti: 3+2+3+3)

3. Nello spazio, sono assegnati il piano π di equazione $x + z = 1$ ed il punto P di coordinate $(1,2,2)$.
- Scrivere un'equazione cartesiana del piano che passa per P ed è parallelo a π .
 - Scrivere delle equazioni cartesiane della retta che passa per P ed è parallela sia a π sia al piano $x = 0$.
 - Scrivere delle equazioni cartesiane della retta che passa per P ed è perpendicolare a π .

(punti: 1+2+2)

4. Scrivere delle equazioni cartesiane e delle equazioni parametriche per la circonferenza c che giace nel piano $z = 2$, ha centro nel punto $P = (1,2,2)$ e passa per $Q = (2,2,2)$. Utilizzare i risultati precedenti per scrivere:
- un'equazione cartesiana di un cilindro che contenga c ,
 - delle equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del cono che ha vertice nell'origine e contiene c .

(punti: 2+1+2)

5. Determinare la direzione degli assi, il centro ed il tipo della conica C di equazione

$$4xy - 4x - 2y + 1 = 0.$$

Trovare un cambiamento di coordinate cartesiane ortogonali che porti l'equazione di C in forma canonica.

(punti: 5)