Lezione n. 5.

Per illustrare i modelli del piano proiettivo reale, seguendo [Testo] n. 1.2 (pag. 18), si è indicata con S^2 la sfera unitaria nello spazio usuale

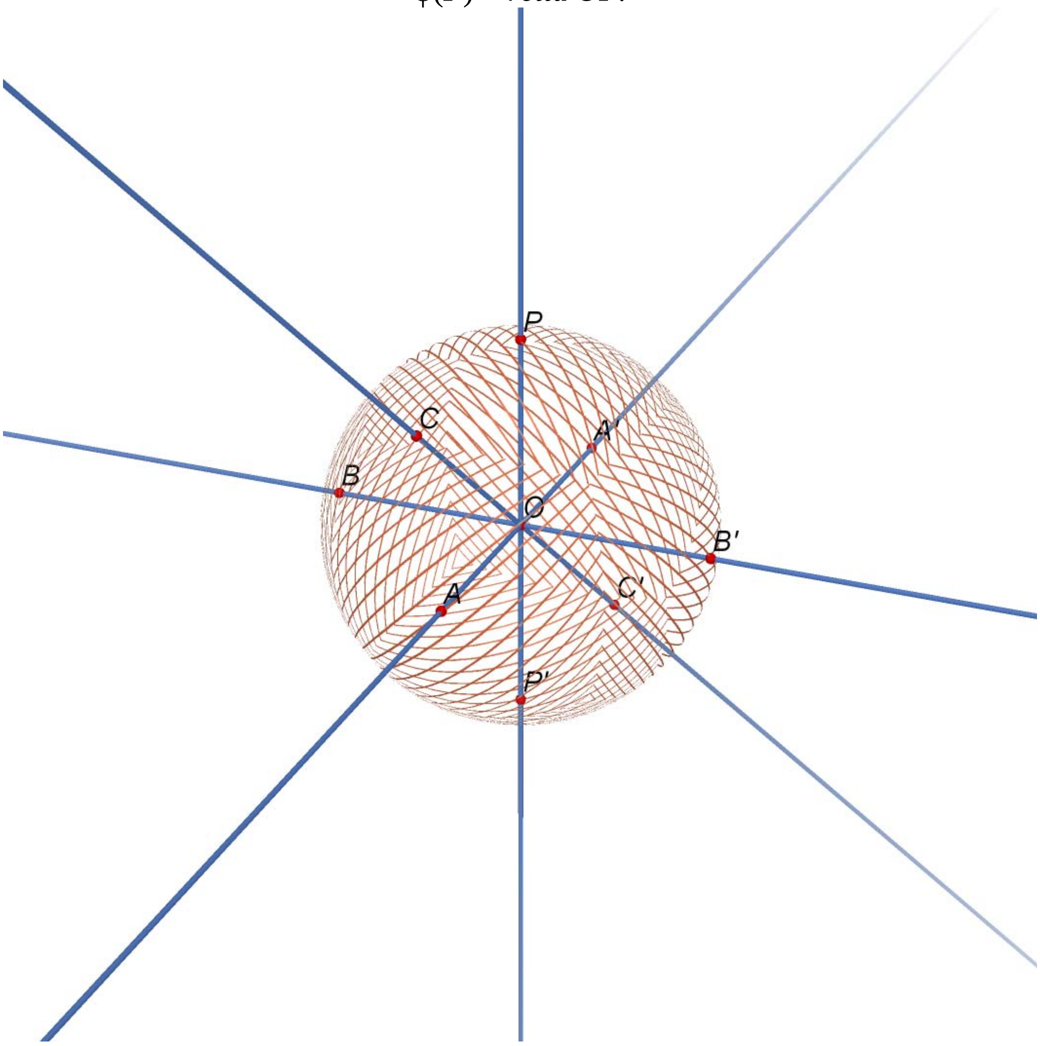
$$S^2 = ,\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} = 1\right\}$$

e si è considerata l'applicazione

$$\varphi\colon S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \equiv \{\text{stella delle rette per l'origine in } \mathbb{R}^3\}$$

che ad un punto P sulla sfera associa la retta OP

$$\varphi(P) = \textit{retta } OP.$$



La controimmagine di una retta è una coppia di punti diametralmente opposti

$$\varphi^{-1}(OP) = \{P, P'\}$$

In S^2 definiamo la relazione di equivalenza:

$P \approx Q$ se o $P = Q$ oppure P, Q sono diametralmente opposti.

L'insieme quoziente $S^2/\approx$ si identifica con $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

$S^2/\approx$ si rappresenta con una semisfera nella quale ogni punto del bordo è incollato con quello diametralmente opposto; questo modello del piano proiettivo reale verrà studiato nel corso di Elementi di Topologia generale.

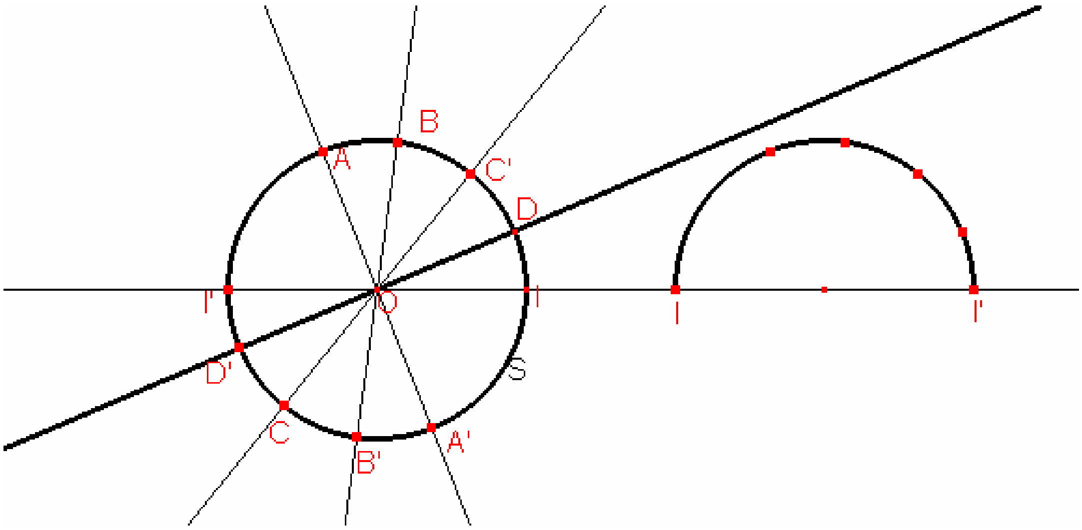
In modo del tutto analogo, si definisce un'applicazione dalla circonferenza unitaria *S* alla retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

$$\varphi: S \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \equiv \{\text{fascio delle rette per l'origine in } \mathbb{R}^2\}$$

e si definisce sulla circonferenza la relazione di equivalenza

$$P \approx Q \ \text{ se } \ \text{o } P = Q \ \text{ oppure } P, Q \text{ sono diametralmente opposti.}$$

L'insieme quoziente $S/\approx$ si rappresenta con una semicirconferenza, i cui estremi I, I' sono identificati, e quindi ancora con una circonferenza, ovvero con una curva chiusa.



Insomma, aggiungendo alla retta il punto improprio, la si è fatta diventare una curva chiusa.