Sulle lezioni n. 6-7-8-9 (21-23-27-28 ottobre 2008).

Gli argomenti delle lezioni sono reperibili in [Testo] nei n. 1.3, 1.4, 1.5, 1.6. Si possono tralasciare gli esempi 1.4.12 e 1.4.13; sono consigliati gli esercizi 1.4.14 e 1.6.11.
Non ci occupiamo delle questioni topologiche trattate nel n. 1.7.1, ma abbiamo già introdotto il tema dell'immersione dello spazio affine nel proiettivo, di cui si parla nel n. 1.7.2, nelle pag. 43-44-45.

Per illustrare il teorema 1.5.1, sul **cambiamento di coordinate nello spazio proiettivo**, consideriamo un esempio (1.5.2 nel testo).
In $\mathbb{P}^1$, sia S il riferimento canonico; le coordinate proiettive di un punto P rispetto a S siano $[x_1,x_2]$. Scegliamo un nuovo riferimento S', che abbia come punti fondamentali i punti $A'_1 = [1,2]$, $A'_2 = [0,-1]$, e come punto unità U' il punto $[2,3]$; indichiamo con $[x_1',x_2']$ le coordinate di P rispetto a S'.
Per individuare il cambiamento di coordinate dobbiamo trovare quei rappresentati delle classi di equivalenza A'_1 e A'_2 che permettono di scrivere U' come loro somma. Si devono determinare i valori dei parametri λ, μ per i quali si abbia:

$$\begin{cases} 2 = \lambda \\ 3 = 2\lambda + \mu \end{cases}$$

cioè

$$\lambda = 2,\ \mu = 1.$$

Dunque i rappresentanti di A'_1 e A'_2 da usare per determinare le nuove coordinate sono

$$(2,4),\ (0,-1).$$

Il cambiamento di coordinate equivale al cambiamento di base, in $\mathbb{R}^2$, dalla base canonica alla base $\{(2,4), (0,-1)\}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Per esprimere le nuove coordinate proiettive (definite a meno di un fattore moltiplicativo non nullo) in funzione delle vecchie basta moltiplicare ambo i membri della precedente equazione per la matrice inversa, e inserire un fattore moltiplicativo ρ:

$$\rho \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho/2 & 0 \\ 2\rho & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

L'ultima scrittura mette in evidenza il fatto che la matrice associata al cambiamento di coordinate proiettive è definita a meno di un fattore moltiplicativo diverso da 0. Usualmente, però, il cambiamento di coordinate proiettive è scritto nella forma

$$\rho \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

oppure

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$