Geometria euclidea, affine e proiettiva – anno acc. 2008/09
5 novembre 2008

Sulle lezioni n. 10-11 (4-6 novembre 2008).

Gli argomenti delle lezioni sono reperibili in [Testo] nei n. 2.1, 2.2. Il n. 2.3 viene omesso.

Sugli esercizi (3-4 novembre 2008)
Nelle due ore di esercitazione del 3 novembre ed in quella del 4 novembre si sono discussi esercizi su sottospazi proiettivi, riferimenti proiettivi, dualità.

Alcuni esempi di svolgimento di esercizi sulla dualità (tra cui l'esercizio 1(d) assegnato il 30 ottobre scorso) si trovano nella pagina del corso dell'anno accademico 2006/07,
http: //www.mat.unical.it/~daprile/materiali/geo_eap_07/geo_eap_0607.htm
e anche nella pagina del corso dell'anno accademico 2007/2008
http://www.mat.unical.it/~daprile/materiali/Euclaffpro07_08/2228ott.pdf

Ecco, comunque, ecco una soluzione degli esercizi 1 e 2 (d)

Proposizione. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, assegnate due rette *r, s* in posizione generale ed un punto *P* che non appartiene allo spazio congiungente di *r, s*, non esiste nessuna retta che passi per *P* e sia incidente ad entrambe *r,s*.	**Proposizione.** In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, assegnati due piani ρ, σ in posizione generale ed un iperpiano *p* che non contiene lo spazio intersezione di ρ, σ, non esiste nessun piano che sia contenuto in *p* e tale che entrambi gli spazi che lo congiungono con ρ oppure con σ siano iperpiani.
Dimostrazione. Per ipotesi: ▪ $r \cap s = \emptyset$, ▪ la dimensione dello spazio $J(r,s)$, congiungente di *r, s*, è 3; ▪ $P \notin J(r,s)$. Supponiamo che esista una retta *t* per *P*, tale che gli spazi $t \cap r$, $t \cap s$ abbiano dimensione uguale a 0. Da questo segue che *t* è lo spazio congiungente un punto di *r* con uno di *s*, quindi è contenuta nello spazio $J(r,s)$; ma allora *P* , che sta su *t*, apparterrebbe a $J(r,s)$, contrariamente all'ipotesi. Quindi la retta *t* non esiste, c.v.d.	**Dimostrazione.** Per ipotesi, ▪ $J(\rho, \sigma) = \mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, ▪ la dimensione dello spazio $\rho \cap \sigma$ è zero; ▪ *p* non passa per il punto $\rho \cap \sigma$. Supponiamo che esista un piano τ, contenuto in *p*, tale che gli spazi $J(\tau,\rho)$, $J(\tau,\sigma)$ abbiano dimensione uguale a 3. Da questo segue che τ è il piano intersezione dei due iperpiani $J(\tau,\rho)$, $J(\tau,\sigma)$, quindi contiene $\rho \cap \sigma$; ma allora *p*, che contiene τ, conterrebbe il punto $\rho \cap \sigma$, contrariamente all'ipotesi. Quindi il piano τ non esiste, c.v.d.