Esercitazione: richiami su sistemi lineari, sottospazi vettoriali

I. Interpretazione geometrica di sistemi lineari in due e tre incognite.

A.1. Determinare il coefficiente k in modo che il sistema $\begin{cases} x+ky=2 \\ 3x-y=6 \end{cases}$ non abbia soluzioni.

A.2. Determinare il coefficiente k in modo che le rette di equazioni $3x - y = 6$, $x + ky = 2$ siano parallele; disegnare le due rette.

B.1. Discutere e risolvere, per i valori di h per cui è possibile, il sistema $\begin{cases} x+2y=h \\ 4x+8y=3 \\ x-7y=2 \end{cases}$.

B.2. Per quali valori di h le rette di equazioni $4x+8y=3$, $x-7y=2$, $x+2y=h$ sono lati di un triangolo? Vi sono valori di h per i quali le tre rette siano **distinte e** di uno stesso fascio?

C.1. Utilizzare il teorema di Rouché-Capelli per stabilire la condizione di parallelismo tra due rette generiche di equazioni $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$.

C.2. Utilizzare il teorema di Rouché-Capelli per stabilire la condizione di parallelismo tra due piani generici di equazioni $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

II. Sistemi lineari omogenei e sottospazi vettoriali.

1.a. Trovare le autosoluzioni dei sistemi omogenei in tre incognite
(i) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=0 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x_1+5x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$ (iii) $4x_1+3x_2+x_3=0$ (iv) $x_2+x_3=0$.

1.b. L'insieme delle soluzioni di ciascuno dei sistemi considerati in 1.a è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$: determinarne una base e la dimensione.

2.a. Scrivere un sistema lineare omogeneo nelle incognite x_1, x_2, x_3 le cui soluzioni siano tutti e soli i vettori del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da (3,2,1) e (0,1,0).
2.b. Come in 2.a, per il sottospazio generato da (3,2,1).

3.a. Trovare generatori e dimensione dello spazio delle autosoluzioni dei sistemi lineari, nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4

(i) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_3=0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_3=0 \end{cases}$.

3.b. Scrivere un sistema lineare omogeneo nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 le cui soluzioni siano costituite da tutti e soli i vettori del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato da (1,1,0,0), (2,1,2,1), (2,0,0,1), (4,0,0,2).
3.c. Come in 3.b., per i sottospazi generati da
 (i) (1,2,3,4), (5,6,7,8), (9,10,11,12)
 (ii) (1,2,3,4), (0,1,2,0) (0,1,0,0)
 (iii) (1,2,3,4), (2,1,0,0)