Esercizi su polarità e coniche

1. Sia $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ un'equazione di una conica non degenere Q. Verificare che la polare di un punto $[y_1 y_2, y_3]$ rispetto a Q ha equazione $y_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$

2. Verificare che la conica di equazione $3x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$ è non degenere; trovare
   a) la polare di [0,1,1] b) il polo della retta $x_1 = 0$ c) la retta tangente in [0,1,0].

3. Verificare che le coniche di equazioni
$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_3^2 = 0; \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$$
   sono degeneri; trovare i loro punti doppi e determinare le loro componenti.

4. La polarità definita dalla conica $x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 = 0$ induce nel fascio di centro [1,0,0] l'involuzione delle rette coniugate: scrivere un'equazione dell'involuzione e verificare che gli elementi uniti sono le due tangenti alla conica.

5. Determinare un'equazione che rappresenti la conica C che passa per i punti [0,1,0], [0,0,1], [2, 0,1] e per la quale la retta $x_1 = 0$ è la polare del punto [1,1,0]. Considerata la conica affine che è l'intersezione di C con l'insieme definito dalla condizione $x_3 \neq 0$, determinarne il tipo, e, se possibile, il centro e gli asintoti.

6. Determinare il centro, la tangente nell'origine e, se possibile, gli asintoti della coniche di equazioni
$$x^2 - 5xy + 4y^2 - 2x = 0; \qquad x^2 + 4xy + 8y^2 - 2x = 0.$$

7. Dire, motivando la risposta, quali tra le equazioni che seguono rappresentano coniche equivalenti per affinità
$$x^2 + y^2 = 1, \quad 6x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + 8y^2 + 2xy - 4x = 0.$$

8. Indicare, motivando la risposta, quali equazioni rappresentino coniche proiettivamente equivalenti:
$$2xy - 4x = 0, \quad x^2 - y^2 + 4x = 0, \quad x^2 - y^2 = 0, \quad x^2 - 4 = 0.$$

9. Verificare che la polare del fuoco di una parabola è la direttrice della parabola, e che nel fascio delle rette per il fuoco l'involuzione delle rette coniugate coincide con l'involuzione, detta *ortogonale*, che ad ogni retta associa la sua perpendicolare. (*Suggerimento*: è lecito prendere una parabola in forma canonica.)

10. Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro, per la quale l'involuzione dei diametri coniugati coincide con l'involuzione ortogonale (cioè, quella che ad ogni retta fa corrispondere la retta ortogonale): che tipo di conica è $\mathcal{C}$?

11. Date due coniche di equazioni, rispettivamente, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, $g(x_1, x_2, x_3) = 0$, si chiama ***fascio*** l'insieme delle coniche di equazioni $\lambda f + \mu g = 0$. Dimostrare che un fascio di coniche contiene al più tre coniche degeneri e che o tutte le coniche del fascio sono parabole oppure il fascio contiene al più due parabole.

12. Giustificare l'affermazione: *i diametri di una parabola sono tra loro paralleli*. Verificare che i punti medi delle intersezioni della parabola $y^2 - 2x = 0$ con le rette per il punto improprio $[a,b,0]$ giacciono sul diametro coniugato a $[a,b,0]$. Spiegare questo risultato usando le proprietà della retta polare.

13. (Dall'esame del 11 luglio 2007) Determinare i coefficienti a, b nell'equazione
$$x^2 + a\,y^2 + 2\,x\,y + 2\,(b + a)\,x + 2\,b\,y + 4 = 0$$
in modo che l'equazione rappresenti una conica $\mathcal{C}$ con il centro nel punto $(-1,2)$. Stabilire di che tipo sia $\mathcal{C}$, determinandone i punti impropri.

14. (Dall'esame del 12 settembre 2007) E' vero o falso che il sottoinsieme del piano affine reale definito dall'equazione $x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 6y + 5 = 0$ è costituito da un solo punto? Motivare la risposta ricorrendo allo studio della conica che è la chiusura proiettiva del sottoinsieme affine considerato.

15. (Dall'esame del 4 luglio 2008) Nel piano affine reale è assegnata la famiglia di coniche di equazione (dipendente dal parametro k)
$$x^2 + 2kxy + (k-1)y^2 + 4x - 2ky = 0.$$
   a) Verificare che tutte le coniche della famiglia sono coniche a centro;
   b) determinare e studiare la conica K per la quale il centro ha le coordinate $(-2,0)$;
   c) nella polarità indotta da K, quale è il diametro coniugato al diametro $y = x - 2$?

16. (dall'esame del 10 dicembre 2007) Nel piano proiettivo reale, sono assegnati: la retta r di equazione $x_1 + 2\,x_3 = 0$, il punto $P = [1,0,0]$, la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2 = 0$.
   - Esiste un triangolo autopolare rispetto a $\mathcal{C}$ che abbia un vertice coincidente con P ed un altro vertice su r ? Se esiste, determinare i suoi vertici.
   - Nel piano affine che si ottiene considerando come retta all'infinito la retta di equazione $x_3=0$, sia Γ la conica di cui $\mathcal{C}$ è la chiusura proiettiva. Trovare i punti impropri di Γ, dedurne che tipo di conica affine sia Γ e, se possibile, determinare il centro di Γ.

17. (dall'esame del 2 settembre 2008) Scrivere un'equazione della conica Q che passa per il punto $A_3 = [0,0,1]$ e per la quale il punto $A_1= [1,0,0]$ è il polo della retta di equazione $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$, il punto $A_2= [0,1,0\}$ è il polo della retta $3x_1 + 4x_2 = 0$.
Nel piano affine che si ottiene scegliendo come retta impropria la retta di equazione $x_3= 0$, studiare la conica Q^* la cui chiusura proiettiva è Q, determinandone in particolare il centro e gli eventuali asintoti.

18. (dall'esame dell'appello straordinario, 1 aprile 2008) Nel piano proiettivo reale, è data la conica $\mathcal{C}$ di equazione $x_1^2 - 4x_1x_2 + x_3^2 = 0$. Scrivere un'equazione della polare p del punto $P =[1,0,1]$ rispetto a $\mathcal{C}$. Detti A, B i punti comuni a p e a $\mathcal{C}$, in che relazione è $\mathcal{C}$ con le rette che congiungono P con A e con B?