Esercizi sugli elementi impropri e le operazioni di proiezione e sezione.

1. Spiegare le affermazioni seguenti:
- due punti impropri distinti ed un punto proprio determinano uno ed un sol piano che li contiene tutti e tre,
- un punto proprio ed una retta impropria determinano uno ed uno sol piano che passa per essi.

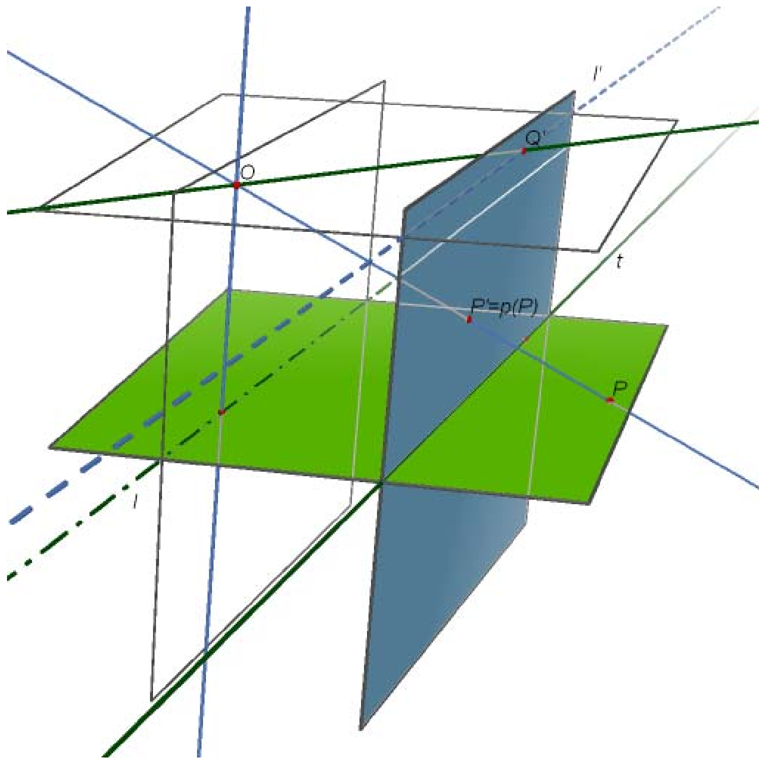
2. In quale relazione sono un piano α ed una retta (propria) r se la retta impropria di α e la retta r sono incidenti?

3. Spiegare il significato della frase: "la retta propria r e la retta impropria α_∞ sono sghembe" deducendone in quale relazione siano la retta r ed un piano con la giacitura α_∞.

4. Nello spazio (della geometria elementare) sono dati due piani α e α', che si incontrano in una retta t, ed un punto O fuori da α e α'.
a) Dimostrare che, se lo spazio è ampliato con gli elementi impropri, allora la proiezione da O di α su α' è un'applicazione bijettiva $p: \alpha \to \alpha'$, specificando, in particolare, quali siano
- l'immagine di un punto Q che appartenga alla retta l tagliata su α dal piano parallelo ad α' per O
- l'immagine della retta l
- la controimmagine di un punto Q' che appartenga alla retta l' tagliata su α' dal piano parallelo ad α per O
- la controimmagine della retta l'.

b) Dimostrare che l' è parallela a t.

Nella figura, α e l sono colorati in verde, α', l' in blu. I piani α e α' sono disegnati perpendicolari solo per analogia con la situazione "pavimento, quadro" considerata nello studio della prospettiva; la relazione di perpendicolarità tra i due piani non influenza lo svolgimento dell'esercizio.



5. Nello spazio ampliato con gli elementi impropri, sono dati due piani α e α', che si incontrano in una retta t, ed un punto O fuori da α e α'. Sia p: $\alpha \to \alpha'$ la proiezione da O di α su α'. Si chiama *retta limite di* α la retta l la cui proiezione è la retta impropria r'_∞ di α'.
Come bisogna scegliere un quadrilatero $Q \subset \alpha$ perché la sua proiezione $p(Q)$ sia un parallelogrammo?

6. Nello spazio ampliato con gli elementi impropri, sono dati due piani α e α', che si incontrano in retta propria t. Fissata una retta d che non sia parallela a nessuno dei due piani, si chiami D il suo punto improprio. La proiezione da D viene detta *proiezione parallela* nella direzione D di α su α'. Quali sono le rette limite in questo caso? Come bisogna scegliere un quadrilatero $Q \subset \alpha$ perché la sua proiezione parallela su α' sia un parallelogrammo?

7. Che relazione c'è tra un quadrilatero $Q \subset \alpha$ e la sua proiezione parallela su un piano parallelo ad α ?

8. In un piano, si consideri un pentagono inscritto in una circonferenza. Da un punto esterno al piano, si proiettino il pentagono e la circonferenza su un altro piano. Che cosa si può prevedere delle loro immagini? Quali proprietà della figura formata da pentagono e circonferenza sono invarianti per proiezione e sezione?

9. Nello spazio riferito a coordinate cartesiane ortogonali (x,y,z) è assegnato il punto $C = (0,0,1)$. Sia α il piano di equazione $z = 0$. Indichiamo con p_C l'applicazione "proiezione da C su α", che ad ogni punto $P = (a,b,c)$ dello spazio, diverso da C, associa il punto $P' = (x',y',0)$ che è l'intersezione della retta di P e C col piano α.

a) Trovare le equazioni di p_C , cioè le relazioni che legano x', y' con a,b,c.
b) Utilizzare le equazioni di p_C per verificare che l'applicazione non è definita su tutto lo spazio; interpretare geometricamente i risultati analitici ottenuti.
c) Verificare, usando le equazioni, che p_C non è iniettiva; in particolare, determinare l'insieme $p_C^{-1}((0,2,0))$, cioè l'insieme delle controimmagini del punto $(0,2,0)$.

2. Ripetere l'esercizio precedente per il caso in cui il centro di proiezione sia il punto improprio dell'asse delle z, cioè:

a) trovare le equazioni della proiezione ortogonale dello spazio sul piano $z = 0$,
b) verificare che la proiezione ortogonale non è iniettiva e in particolare determinare le controimmagini di $(0,2,0)$,
c) verificare che la proiezione ortogonale sul piano $z = 0$ è bijettiva se ristretta al piano $z = k$, per k fissato;
d) di che applicazione si tratta se la proiezione ortogonale è ristretta al piano $z = 0$?.