

### Esercizi sulle coordinate omogenee nel piano e nello spazio.

1. Scrivere le equazioni delle chiusure proiettive e trovare i punti impropri dei sottoinsiemi del piano definiti dalle equazioni

$$1) 2x+3y=2; \quad 2) 2x+3y=0; \quad 3) \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1; \quad 4) \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1; \quad 5) x^2-y^2=0.$$
$$6) x^2+y^2=4; \quad 7) y^2-2px=0; \quad 8) (x+y)^2-4(x-y)=0.$$

2. In che relazione sono i punti impropri dell'iperbole di equazione 3) dell'esercizio precedente con i punti impropri dei suoi asintoti?

3. In che relazione stanno i punti impropri delle parabole di equazioni 7,8 del primo esercizio con i punti impropri degli assi di simmetria di quelle parabole?

4. Procedendo per analogia con il caso del piano, introdurre le coordinate cartesiane omogenee nello spazio e scrivere le equazioni delle chiusure proiettive dei sottoinsiemi definiti dalle equazioni

$$a) x+y+z=1; \quad b) x=y=0; \quad c) \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}; \quad d) \begin{cases} z=3 \\ x^2-y^2+z^2=9 \end{cases}; \quad e) \begin{cases} x=1+t \\ y=-2-3t \\ z=4t, \end{cases} \quad (t \text{ parametro reale}).$$

Per ciascuna chiusura proiettiva trovata, determinare la sua intersezione con il piano improprio (il "luogo improprio").

5. Determinare le coordinate omogenee del punto improprio della retta di equazioni

$$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ -x+y+z=-2 \end{cases}.$$

Trovare delle equazioni parametriche della stessa retta e confrontare i suoi parametri direttori con le coordinate del suo punto improprio.

6. Trovare i luoghi impropri della retta e del piano definiti rispettivamente da

$$x=y=z \quad \text{e da} \quad 3x-2y-z=3.$$

Trovare,

- se esiste, l'intersezione della retta e del piano nello spazio usuale
- l'intersezione dei loro luoghi impropri.

7. Studiare brevemente i luoghi impropri delle seguenti quadriche:

- $x^2+y^2+z^2-1=0$
- $x^2+y^2-1=0$
- $x^2-y^2+z^2-1=0$
- $x^2+4y^2+9z^2-1=0$
- $x^2+y^2-2z=0$
- $x^2-y^2-2z=0$
- $x^2+y^2-z^2=0$