Esercizi su sottospazi proiettivi.

1. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sono assegnati i punti $A = [1,1,1]$, $B = [0,1,0]$.
   (a) Scrivere delle equazioni parametriche e un'equazione cartesiana della retta *AB.*
   (b) Trovare il punto di intersezione tra la retta *AB* e la retta di equazione $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

2. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sono assegnati i punti $A = [1,1,1,0]$, $B = [0,1,0,1]$, $C = [1,0,3,1]$.
   (a) Verificare che *A, B, C* non sono allineati e scrivere un'equazione del piano *ABC.*
   (b) Trovare delle equazioni parametriche per il piano α di equazione $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$.
   (c) Scrivere delle equazioni che rappresentino una retta passante per *C* e sghemba con la retta *AB.*

3. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, sono assegnati i punti $A = [1,1,1,0,0]$, $B = [0,1,0,0,0]$, $C = [2,0,3,4,0]$ e l'iperpiano β di equazione $x_1 - x_5 = 0$.
   (a) Rappresentare la retta *AB* in forma implicita (come intersezione di iperpiani).
   (b) Rappresentare lo spazio γ congiungente la retta *AB* con il punto *C,* in forma parametrica e in forma implicita.
   (c) Determinare gli spazi $\gamma \cap \beta$ e $J(\beta,\gamma)$, dandone delle equazioni parametriche e cartesiane.
   (d) Stabilire la dimensione e trovare una rappresentazione parametrica del sottospazio δ di equazioni $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.
   (e) Determinare lo spazio $\gamma \cap \delta$, trovandone delle equazioni parametriche e cartesiane.

4. Utilizzando i risultati ottenuti sopra, stabilire se sono in posizione generale i seguenti sottospazi:
   (a) la retta *AB* dell'esercizio 1 ed il punto $C = [1,0,3]$;
   (b) il piano *ABC* ed il piano α dell'esercizio 2;
   (c) i sottospazi β, γ dell'esercizio 3;
   (d) i sottospazi δ e γ dell'esercizio 3.

5. Sia δ il sottospazio di $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ di cui si parla nell'esercizio 3(d). Trovare un sottospazio che sia complementare del sottospazio δ.

6. In $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$, sono assegnati:
   a) due piani (sottospazi di dimensione due) in posizione generale,
   b) due rette in posizione generale.
   Qual è la dimensione dei sottospazi intersezione e congiungente in ciascuno dei due casi?

7. Dimostrare, usando la formula di Grassmann, che se due rette in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (con $n>2$) si intersecano in un punto, allora sono contenute in uno stesso piano.

8. (i) E' vero che, dati in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ due rette *r, s* sghembe (cioè, in posizione generale) ed un punto *P* che non appartiene a nessuna delle due, esiste una retta (sola) retta passante per *P* ed incidente ad entrambe *r,s* ?
(ii) In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, sono assegnate due rette *r, s* in posizione generale ed un punto *P* che non appartiene allo spazio congiungente *r,s*. E' vero o falso che non esistono rette passanti per *P* ed incidenti ad entrambe *r,s* ? (*Suggerimento*: considerare i piani che congiungono *P* con ciascuna delle rette; lo spazio intersezione dei due piani…..)