Esercizi su riferimenti proiettivi, cambiamenti di coordinate proiettive.

1. Come si trasformano le coordinate proiettive in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, se il nuovo riferimento ha gli stessi punti fondamentali del vecchio e ha come punto unità il punto $U' = [-7,2,3,2]$?

2. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sono assegnati i punti $A = [1,1,1]$, $B = [0,1,0]$, $C = [1,2,1]$, $D = [1,0,3]$, $E = [2,0,0]$.
   (a) Spiegare perché non è possibile scegliere un sistema di riferimento proiettivo in cui *A, B, C* siano punti fondamentali, e perché invece si può considerare un sistema $\mathcal{S}$ di cui *A, B, D* siano i punti fondamentali ed *E* sia il punto unità.
   (b) Scrivere il cambiamento di coordinate omogenee dal riferimento standard a $\mathcal{S}$.
   (c) Quali sono le coordinate di *C* nel sistema di riferimento $\mathcal{S}$?

3. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, è data la retta di equazione $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$. Rappresentarla in forma parametrica in modo che i parametri siano le coordinate dei suoi punti rispetto al riferimento proiettivo, sulla retta, che ha come punti fondamentali i punti $A_1 = [1,0,1]$, $A_2 = [0,1,3]$ e come punto unità $U = [2,1,5]$.

4. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, si consideri la retta *r* di equazioni $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$. Si verifichi che ad *r* appartengono i punti

$$T = [1,1,-1/2,1],\ V = [0,1,0,1],\ U = [2,0,-1,0],\ W = [6,5,-3,5].$$

Sia $\mathcal{S}$ il sistema di riferimento proiettivo su *r* nel quale *T, V, U* sono i punti fondamentali ed il punto unità. Trovare le coordinate $[y_1, y_2]$ di *W* nel riferimento $\mathcal{S}$.

5. Dalla prova d'esame dell'11 aprile 2007. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sono assegnate due rette *r, s* in posizione generale.
a) Spiegare perché è lecito supporre che le equazioni cartesiane di *r* siano $x_1 = x_2 = 0$ e le equazioni di *s* siano $x_3 = x_4 = 0$.
b) Sia $P = [1,0,1,0]$. Scrivere delle equazioni cartesiane della retta *a* che passa per *P* ed è complanare sia con *r* che con *s* .

6. (a) In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia $S(A, B; M)$ il riferimento proiettivo che ha come punti fondamentali $A = [1,2]$, $B = [3,-2]$ e come punto unità $M = [2,0]$. Scrivere il cambiamento di coordinate dal riferimento standard al riferimento $S(A, B; M)$.
(b) Si identifichi la retta affine $\mathbb{A}^1$ con $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ meno il punto *B*. Nel sistema di coordinate affini che si ottiene restringendo ad $\mathbb{A}^1$ il riferimento $S(A, B; M)$ e passando a coordinate non omogenee, qual è la coordinata affine di *M*?

7. Si consideri il cambiamento di coordinate di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ assegnato dalle equazioni $\begin{cases} \rho x'_1 = x_1 \\ \rho x'_2 = 2x_2 \\ \rho x'_3 = x_1 + 3x_2 - x_3 \end{cases}$.
   a) Quali equazioni hanno, nelle vecchie coordinate, le rette che sono i lati del nuovo riferimento proiettivo?
   b) Sia $\mathcal{P}$ la curva di equazione $x_1(x_1 + 3x_2 - x_3) - x_2^2 = 0$. Trovare una sua equazione nelle nuove coordinate.

c) Trovare le equazioni che rappresentano la curva $\mathcal{P}$ nei due sistemi di coordinate affini ottenuti il primo passando alle coordinate non omogenee $X = \frac{x_1}{x_3}, Y = \frac{x_2}{x_3}$, il secondo ponendo $X' = \frac{x'_1}{x'_3}, Y' = \frac{x'_2}{x'_3}$.

Esercizi sulla dualità

1. Scrivere la proposizione duale di ciascuna delle seguenti proposizioni.
   (a) Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, fissato un punto *P*, vi sono infinite rette passanti per *P*.
   (b) Dati in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ quattro punti *A, B, C, D*, a tre a tre non allineati, esistono sei rette che li congiungono a due a due. Tali rette si intersecano, oltre che nei punti *A, B, C, D,* in altri tre punti *P,Q,R*.
   (c) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, date tre rette *a, b, c* a due a due sghembe tra loro, esistono infinite rette che le incontrano tutte e tre; e precisamente, per ogni punto *P* su *a*, esiste una retta passante per *P* che interseca sia *b* sia *c*.
   (d) In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, assegnate due rette *r, s* in posizione generale ed un punto *P* che non appartiene allo spazio congiungente di *r,s*, non esiste nessuna retta che passi per *P* e sia incidente ad entrambe *r,s.*

2. Dividere la pagina a metà con una riga verticale e scrivere a sinistra una giustificazione per ciascuna delle affermazioni dell'esercizio precedente e a destra quella una dimostrazione della sua duale (*suggerimento:* utilizzare le definizioni di sottospazi proiettivi e di spazio congiungente, la formula di Grassmann, la definizione di "posizione generale" e la legge di dualità).

3. (Assegnato come compito a casa nel corso dell'anno accademico 2007/08). Scrivere la proposizione duale della proposizione A.

Proposizione A:
in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, dati un sottospazio, σ, di dimensione due (un piano) ed un sottospazio, *r,* di dimensione uno (una retta) in posizione generale, comunque si prenda una retta *s* contenuta in σ, esiste un solo iperpiano che contiene entrambe le rette *r* ed *s*.

Dimostrare le due proposizioni per via sintetica.
Dimostrare la proposizione A per via analitica, scegliendo il sistema di riferimento proiettivo in modo conveniente. Perché è lecito supporre che σ abbia equazioni

$x_1 = x_2 = 0$ e che r abbia equazioni $x_3 = x_4 = x_5 = 0$?

4. (dall'esame del 19 settembre 2005) (a) Scrivere la proposizione duale della seguente:
"date nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tre rette (distinte), se esse non giacciono in uno stesso piano, ma sono a due a due complanari, allora esse hanno un punto in comune."
(b) Dimostrare o la proposizione precedente oppure la duale.

5. (appello straordinario del 1 aprile 2008) Enunciare la proposizione duale della seguente:
dati in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ un piano π ed una retta *r* che non sia contenuta in π, esiste un solo punto X che appartiene sia a π che ad r.
Dimostrare, a scelta, o la proposizione data o la duale.