

## Esercizi sul birapporto e sulle proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ .

1. Calcolare il birapporto di ciascuna delle seguenti quaterne ordinate di punti di  $P^1(\mathbb{R})$ , utilizzando sia coordinate omogenee che coordinate non omogenee:

- a)  $A = [2,1], B = [-2,1], C = [0,1], D = [4,1]$
- b)  $A = [2,1], B = [-2,1], C = [0,1], I = [4,0]$
- c)  $A = [2,1]; B = [-2,1], I = [1,0], D = [4,1]$
- d)  $I = [1,0], D = [4,1], B = [-2,1], E = [22,1]$ .

2. Tra le quaterne dell'esercizio 1, una è una quaterna armonica. Che cosa si può osservare, passando a coordinate non omogenee?

3. Esiste qualche proiettività di  $P^1(\mathbb{R})$  che applichi ordinatamente una delle quaterne dell'esercizio 1 su un'altra? In caso affermativo, scrivere delle equazioni che rappresentino queste proiettività.

4. Esiste qualche proiettività di  $P^1(\mathbb{R})$  che applichi ordinatamente i punti  $A = [2,1], B = [1,0], C = [0,1], D = [1,1]$  sui punti  $A', B', C', D'$  dati da

- a)  $A' = C, B' = A, C' = B, D' = D$  ;
- b)  $A' = D, B' = C, C' = B, D' = A$  ;
- c)  $A' = [1,2], B' = [-1,1], C' = [4,1], D' = B$  ?

In caso affermativo, scrivere delle equazioni che rappresentino queste proiettività.

5. Trovare delle equazioni che rappresentino la proiettività di  $P^1(\mathbb{R})$  che applica i punti  $A = [2,1], B = [1,0], C = [1,3]$  ordinatamente sui tre punti  $A' = [1,0], B' = [2,1], C' = [7,5]$ .

6. Trovare i punti uniti di ciascuna delle proiettività di  $P^1(\mathbb{R})$  rappresentate, in forma matriciale, da:

$$a) \rho X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X; \quad b) \rho X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X; \quad c) \rho X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X.$$

Nei casi in cui i punti uniti siano distinti e reali,  $U, V$ , verificare che il birapporto della quaterna  $(X, X', U, V)$  (*caratteristica* della proiettività) è costante.

7. Scrivere delle equazioni che rappresentino ciascuna delle due proiettività di  $P^1(\mathbb{R})$  che tengono fissi i punti  $A_1 = [1,0], A_2 = [0,1]$  e inoltre soddisfano una delle due condizioni:

- a)  $B = [-2,1]$  va in  $B' = [2,1]$
- b)  $D = [4,1]$  va in  $D' = [8,1]$ .

Rappresentare ciascuna proiettività in coordinate non omogenee (escludendo il punto  $A_1$ ) e determinare, se possibile, la sua caratteristica.

8. Determinare la proiettività di  $P^1(\mathbb{R})$  in cui il punto  $A_1 = [1, 0]$  è unito ed i punti  $B = [-2,1], C = [0,1]$  vanno rispettivamente nei punti  $B' = [2,1], C' = [1,1]$ . Rappresentarla anche in coordinate non omogenee (escludendo il punto  $A_1$ ). Stabilire se si tratta di una proiettività iperbolica o parabolica; nel primo caso, trovarne la caratteristica.