

Esercizi sul birapporto e sulle proiettività di $P^1(\mathbb{R})$.

1. Calcolare il birapporto di ciascuna delle seguenti quaterne ordinate di punti di $P^1(\mathbb{R})$, utilizzando sia coordinate omogenee che coordinate non omogenee:

- a) $A = [2,1], B = [-2,1], C = [0,1], D = [4,1]$
- b) $A = [2,1], B = [-2,1], C = [0,1], I = [4,0]$
- c) $A = [2,1]; B = [-2,1], I = [1,0], D = [4,1]$
- d) $I = [1,0], D = [4,1], B = [-2,1], E = [22,1]$.

2. Tra le quaterne dell'esercizio 1, una è una quaterna armonica. Che cosa si può osservare, passando a coordinate non omogenee?

3. Esiste qualche proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ che applichi ordinatamente una delle quaterne dell'esercizio 1 su un'altra? In caso affermativo, scrivere delle equazioni che rappresentino queste proiettività.

4. Esiste qualche proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ che applichi ordinatamente i punti $A = [2,1], B = [1,0], C = [0,1], D = [1,1]$ sui punti A', B', C', D' dati da

- a) $A' = C, B' = A, C' = B, D' = D$;
- b) $A' = D, B' = C, C' = B, D' = A$;
- c) $A' = [1,2], B' = [-1,1], C' = [4,1], D' = B$?

In caso affermativo, scrivere delle equazioni che rappresentino queste proiettività.

5. Trovare delle equazioni che rappresentino la proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ che applica i punti $A = [2,1], B = [1,0], C = [1,3]$ ordinatamente sui tre punti $A' = [1,0], B' = [2,1], C' = [7,5]$.

6. Trovare i punti uniti di ciascuna delle proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ rappresentate, in forma matriciale, da:

$$a) \rho X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X; \quad b) \rho X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X; \quad c) \rho X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} X.$$

Nei casi in cui i punti uniti siano distinti e reali, U, V , verificare che il birapporto della quaterna (X, X', U, V) (*caratteristica* della proiettività) è costante.

7. Scrivere delle equazioni che rappresentino ciascuna delle due proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ che tengono fissi i punti $A_1 = [1,0], A_2 = [0,1]$ e inoltre soddisfano una delle due condizioni:

- a) $B = [-2,1]$ va in $B' = [2,1]$
- b) $D = [4,1]$ va in $D' = [8,1]$.

Rappresentare ciascuna proiettività in coordinate non omogenee (escludendo il punto A_1) e determinare, se possibile, la sua caratteristica.

8. Determinare la proiettività di $P^1(\mathbb{R})$ in cui il punto $A_1 = [1, 0]$ è unito ed i punti $B = [-2,1], C = [0,1]$ vanno rispettivamente nei punti $B' = [2,1], C' = [1,1]$. Rappresentarla anche in coordinate non omogenee (escludendo il punto A_1). Stabilire se si tratta di una proiettività iperbolica o parabolica; nel primo caso, trovarne la caratteristica.