Esercizi su involuzioni, affinità sulla retta, forme di prima specie.

1. In una proiettività θ: $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ i punti di coordinate non omogenee (affini) $2, 0, -1$ hanno come corrispondenti rispettivamente i punti di coordinate $-1, 0, s$. Come bisogna scegliere s affinché θ sia un'involuzione? Studiare tale involuzione.

2. Perché per determinare un'involuzione α basta assegnare solo due coppie di punti corrispondenti, A, $\alpha(A)$, B, $\alpha(B)$?

3. Determinare (possibilmente, senza fare calcoli) l'involuzione α individuata dalle coppie di punti corrispondenti

$$A = [2,3],\ \alpha(A) = [3,2]\ ;\ B = [-2,4],\ \alpha(B) = [-4,2].$$

Determinarne gli eventuali punti uniti e, passando a coordinate non omogenee, trovare il punto $\alpha(\infty)$.

4.. Studiare l'involuzione nella quale una coppia di punti corrispondenti è quella dei punti di coordinate affini 1 e 3, ed un'altra coppia è formata dai punti di coordinate -2 e 6. Trovarne, se possibile, i punti uniti.

5. Trovare l'altro punto unito dell'involuzione che fissa il punto di coordinata (non omogenea) 2 e scambia 0 con 2/5.

6. Determinare i punti uniti e la caratteristica di ciascuna delle proiettività rappresentate, in coordinate affini, da

$$a)\ x' = \frac{2x-1}{x-1}; \quad b)\ x' = 2(x-2); \quad c)\ x' = -x+9.$$

Tra queste proiettività, alcune sono delle affinità: decomporle in prodotti di omotetie, traslazioni, simmetrie centrali.

7. Scrivere un'equazione che rappresenti la simmetria della retta affine rispetto al punto di coordinata 5.

8. Si considerino le due trasformazioni della retta affine:

τ, traslazione che manda 0 in 1,

ω, omotetia di rapporto 4.

Scrivere delle equazioni che rappresentino le due affinità $\alpha = \omega \circ \tau, \beta = \tau \circ \omega$. Determinare gli eventuali punti uniti di α e di β.

9. Si consideri la corrispondenza ψ, della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ su se stessa, che ad un punto qualsiasi, di coordinata non omogenea x, associa il punto di coordinata x' tale che sia

$$2x^2x' - 4xx' + 2x' - x + 1 = 0\,.$$

a) Dimostrare che ψ non è una proiettività.
b) Determinare l'insieme $\psi^{-1}(1)$ delle controimmagini di 1.
c) Determinare i punti uniti di ψ e ricavarne una ulteriore conferma del fatto che ψ non è una proiettività.

10. Ricordiamo che si chiamano "*forme di prima specie*" gli insiemi che ammettono una corrispondenza biunivoca con $\mathbb{P}^1$.
Una *proiettività tra forme di prima specie* è una bigezione che, rispetto a una qualsiasi coppia di sistemi di riferimento sulle due forme, si rappresenti con equazioni lineari.
Enunciare e dimostrare il "teorema fondamentale sulle proiettività tra due forme di prima specie" (*dati tre elementi distinti A, B, C della prima forma, e tre A', B', C' della seconda forma…)*

11. Nel piano proiettivo, si considerino il fascio F delle rette di centro Q = [2,3,1] e la retta r di equazione $x_1 = 0$.

a) Come bisogna scegliere un sistema di riferimento proiettivo sulla retta r perché le coordinate (intrinseche) rispetto a quel riferimento, di un punto $[0,x_2,x_3]$ siano esattamente $[x_2,x_3]$?
b) Rappresentare una retta generica del fascio F in forma cartesiana.
c) Stabilire una corrispondenza bigettiva tra F e $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, che permetta di dotare F di coordinate proiettive (y_1,y_2).
d) Scrivere, nelle coordinate (y_1,y_2), (x_2,x_3), le equazioni della proiettività φ: $F \to r$ definita da: $\varphi(s) = s \cap r$.
e) Calcolare il birapporto delle quattro rette di F: s_1 di equazione $x_1 - 2x_3 = 0$, s_2 di equazione $x_2 - 3x_3 = 0$, s_3 di equazione $3x_1 - 2x_2 = 0$, s_4 di equazione $x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$.

12. Nello spazio $\mathbb{P}^3$ si consideri il fascio Φ dei piani che passano per la retta s di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

a') Siano: α il piano di equazione $x_1 - x_2 + x_4 = 0$, β il piano di equazione $x_3 - x_4 = 0$, γ il piano $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ e δ il piano $2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Calcolare il birapporto $\Re(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$.
b') Sia r la retta di equazioni $x_1 = x_4 = 0$. Verificare che r ed s sono sghembe.
c') Poniamo $A = r \cap \alpha$, $B = r \cap \beta$, $C = r \cap \gamma$, $D = r \cap \delta$. Calcolare $\Re(A,B,C,D)$ e confrontarlo con $\Re(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$.
d') Scelte delle coordinate proiettive sulle forme di prima specie r e Φ, rappresentare la corrispondenza θ: $\Phi \to r$ definita da:
$$\theta(\Phi) = \Phi \cap r.$$
e') Dimostrare che θ è la proiettività (tra le due forme di prima specie) determinata dalle condizioni di mandare α, β, γ, rispettivamente su A, B, C.

13. Fissati in $\mathbb{P}^2$ due rette r, s ed un punto O che non appartenga a nessuna di esse, la *proiezione* da O di r su s è l'applicazione π che al generico punto P di r associa il punto P' che è intersezione di s con la retta congiungente O con P. Scelto nel piano proiettivo un sistema di riferimento opportuno, dimostrare che π è una proiettività tra forme di prima specie e che, in particolare, detto X il punto comune a r ed s, si ha $\pi(X) = X$.
(Suggerimento: si può scegliere il riferimento in modo che r abbia equazione $x_1 = 0$, s abbia equazione $x_2 = 0$.)