Geometria euclidea, affine e proiettiva – anno acc. 2008/09
24 novembre 2008

Esercizi sul quadrangolo piano completo, prospettività, punti uniti di una proiettività piana.

1. Su un foglio è disegnata una retta, e su di essa sono dati tre punti *A, B, C*. Usando soltanto una matita e una riga, trovare il quarto armonico dopo *A, B, C.*

2. Nel piano affine, è assegnato un quadrangolo piano completo *ABCD*, nel quale il lato r_{AC} è parallelo alla retta r_{LM} che congiunge i due punti diagonali $L = r_{AB} \cap r_{CD}$, $M = r_{AD} \cap r_{BC}$. Sia $X = r_{BD} \cap r_{LM}$. In che relazione stanno i punti *X, L, M* ?

3. Nel piano affine, è dato un trapezio *ABCD* (con r_{AB} parallela a r_{CD}); sia *E* il punto comune alle diagonali del trapezio. Usare il lemma sui quadrangoli piani completi per dimostrare che le intersezioni dei lati del trapezio con la retta per *E* parallela a r_{AB} sono punti simmetrici rispetto ad *E* .

4. Dedurre dalle proprietà del quadrangolo piano completo il noto teorema di geometria elementare: *se in un quadrangolo due coppie di lati opposte sono formate da rette parallele, allora l'unico punto diagonale al finito è il punto medio tra due vertici non consecutivi.* (Suggerimenti: può essere utile ricordare l'esercizio precedente e usare delle proiezioni, notando che una prospettività con il centro all'infinito, di una retta su un'altra, applica il punto improprio della prima sul punto improprio della seconda).

5. Usando la dualità in $\mathbb{P}^2$, definire la "prospettività tra due fasci di rette" (contenuti in $\mathbb{P}^2$) e dimostrare: *condizione necessaria e sufficiente perché una proiettività tra due fasci di rette distinti sia una prospettività è che applichi su se stessa la retta comune ai due fasci.*

6. Disegnare due rette *r, s* distinte ed assegnare tre punti *A, B, C* su *r*, tre punti *A', B', C'* su *s*. Scelto a piacere un punto *X* su *r*, costruire graficamente il corrispondente di *X* nella proiettività $\varphi: r \to s$ che manda ordinatamente *A, B, C* in *A', B, C'*.

7. Dimostrare che se nel piano affine sono assegnate due rette distinte *r, s* , e su *r* sono fissati tre punti distinti *A, B, C,* su *s* sono dati *A', B', C'* in modo tale che la retta $r_{AB'}$ sia parallela a $r_{A'B}$ e che $r_{BC'}$ sia parallela a $r_{B'C}$, allora $r_{CA'}$ è parallela ad $r_{C'A}$.

8. Dimostrare, senza usare la geometria elementare, che, dati nel piano affine due triangoli *ABC, A'B'C,* tali che le tre rette $r_{AA'}$, $r_{BB'}$, $r_{CC'}$ siano concorrenti in un punto *O,* se r_{AB} è parallela ad $r_{A'B'}$ e r_{BC} è parallela a $r_{B'C'}$ allora anche r_{AC} è parallela ad $r_{A'C'}$.

9. Trovare i punti uniti e le rette unite della proiettività θ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ associata alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che la proiettività $\tilde{\theta}$, indotta da θ tra la retta r_1 che congiunge i punti base A_1, A_3 del sistema di riferimento e la sua immagine $\theta(r_1)$, è una prospettività; trovarne il centro e scriverne delle equazioni.

10. Studiare - determinandone i punti uniti, le rette unite, eventualmente la caratteristica - le proiettività piane associate alle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.