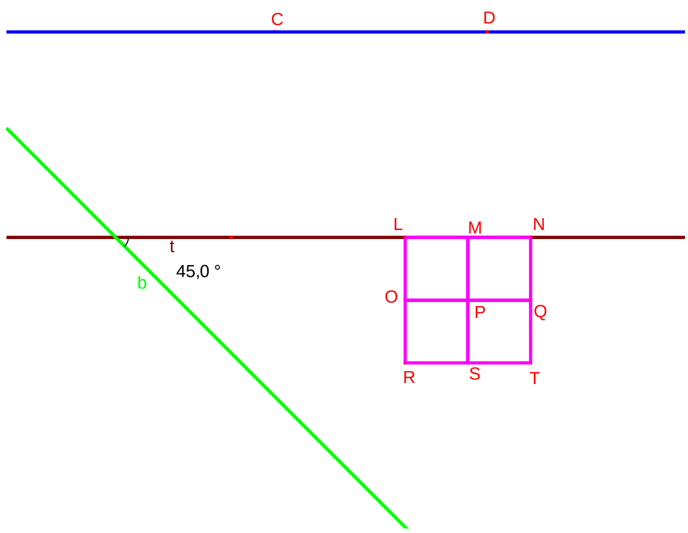
Esercizi su applicazioni dell'omologia, su affinità e isometrie.

1. Dimostrare che *se* φ *è un'omologia piana non speciale, di centro* C, *al variare del punto* P (non unito), *è costante il birapporto (detto "caratteristica dell'omologia") dei punti* P, φ(P), C *e del punto* U *in cui la retta di P e* φ(P) *incontra l'asse dell'omologia.*
2. Un'applicazione di un insieme su se stesso è involutoria se il suo quadrato è l'applicazione identica. Dimostrare (tenendo conto del risultato precedente) che un'omologia che ha caratteristica uguale a -1 è una proiettività involutoria.
3. Costruire le immagini dei quattro quadrati, in cui è decomposto il quadrato LNTR della figura, nell'omologia di asse *t* in cui *C* è l'immagine della direzione perpendicolare a *t* e *D* è l'immagine del punto improprio della retta *b.*



4. Scrivere delle equazioni che rappresentino l'omologia del piano proiettivo con centro [0,1,0] e asse $x_2 = 0$, che manda il punto [2,1,1] nel punto [−2,1,−1]. Studiare l'affinità che è la restrizione di questa omologia all'aperto $x_3 \neq 0$.
5. Trovare i punti uniti e le eventuali rette unite in ciascuna delle affinità di equazioni $\begin{cases} x' = 3x + 2y - 1 \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = 2x + 3 \\ y' = -2y + 1 \end{cases}$; nel caso che qualcuna di queste affinità fosse un'omotetia, determinare il rapporto di omotetia.
6. Determinare i punti uniti delle proiettività associate alle matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e studiare le affinità che si ottengono restringendo le stesse proiettività all'insieme dei punti per i quali è $x_3 \neq 0$ (cioè passando a coordinate non omogenee $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$).
7. Studiare le isometrie di equazioni

$$a) \begin{cases} x' = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} + \dfrac{y}{2} - 1 \\ y' = \dfrac{x}{2} - \dfrac{y\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = -y - 5 \end{cases}; \quad c) \begin{cases} x' = -x - 6 \\ y' = y - 5 \end{cases},$$

stabilendo per ciascuna se sia una rotazione, o una traslazione, o una riflessione rispetto ad una retta, oppure una glissoriflessione (prodotto di una riflessione per una traslazione).