Geometria euclidea, affine e proiettiva

Prova scritta del 15 dicembre 2008

Tempo a disposizione: 3 ore. Si possono consultare gli appunti e il libro di testo.

1. Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sono assegnati i punti

$$A = [1,1,2,0,2],\ B = [2,0,0,2,0],\ C = [3,0,2,3,0],\ D = [-1,0,-2,-1,0].$$

(a) Determinare la dimensione del sottospazio proiettivo S generato da A, B, C, D e scriverne delle equazioni parametriche e delle equazioni implicite (cartesiane).

(b) Scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane che individuino una retta r che passi per il punto A e **non** sia contenuta in S.

(c) Trovare la dimensione dello spazio congiungente di S e r.

2. Enunciare la proposizione duale della seguente:

dati in $\mathbb{P}^4$ un piano π e due punti distinti P, Q, non appartenenti a π, se σ è un qualsiasi piano contenente P e Q, allora σ e π sono in posizione generale.

Dimostrare o la proposizione data oppure la duale.

3. Si consideri la proiettività φ: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ rappresentata, nelle coordinate affini (cioè, non omogenee) x, x', dall'equazione bilineare, dipendente dal parametro h

$$xx' + hx - 2x' + 3 = 0\ .$$

Determinare h in modo che φ tenga fisso il punto che ha la coordinata $x = 1$ e trovare la caratteristica di φ.

4. (a) Determinare punti uniti e rette unite nella proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ associata alla matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Studiare l'affinità che è la restrizione della precedente proiettività al sottoinsieme definito dalla condizione $x_3 \neq 0$, verificando, a conferma di quanto ottenuto in (a), che questa affinità tiene unite le rette di un fascio.

(c) Stabilire se l'affinità studiata in (b) sia una similitudine oppure un'isometria e verificare i risultati ottenuti determinando l'immagine di una circonferenza, con centro in $(-1,0)$ e raggio r fissato.

5. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia F la famiglia di tutte le coniche per le quali il triangolo fondamentale, di vertici [1,0,0], [0,1,0], [0,0,1], è un triangolo autopolare, e che passano per il punto $V = [-1,1,0]$.

i. Si rappresenti F con un'equazione.

ii. Si verifichi che F contiene due sole coniche specializzate e si stabilisca se esse sono proiettivamente equivalenti.

iii. Verificare che, nel piano affine che si ottiene prendendo la retta $x_3 = 0$ come retta impropria, le coniche le cui chiusure proiettive sono in F hanno tutte lo stesso centro e gli stessi asintoti.

iv. Determinare tali asintoti.