Geometria euclidea, affine e proiettiva

Prova scritta del 15 dicembre 2008

Tempo a disposizione: 3 ore. Si possono consultare gli appunti e il libro di testo.

1. Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sono assegnati i punti

$$A = [2,2,0,0,1],\ B = [1,0,0,1,0],\ C = [3,0,1,3,0],\ D = [2,0,1,2,0].$$

   (a) Determinare la dimensione del sottospazio proiettivo S generato da A, B, C, D e scriverne delle equazioni parametriche e delle equazioni implicite (cartesiane).
   (b) Scrivere delle equazioni parametriche e cartesiane che individuino una retta r che passi per il punto A e **non** sia contenuta in S.
   (c) Trovare la dimensione dello spazio congiungente di S e r.

2. Enunciare la proposizione duale della seguente:

   dati in $\mathbb{P}^4$ un piano π e due punti distinti P, Q, non appartenenti a π, se σ è un qualsiasi piano contenente P e Q, allora σ e π sono in posizione generale.

Dimostrare o la proposizione data oppure la duale.

3. Si consideri la proiettività φ: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ rappresentata, nelle coordinate affini (cioè, non omogenee) x, x', dall'equazione bilineare, dipendente dal parametro h

$$xx'+4x-hx'-6=0\,.$$

Determinare h in modo che φ tenga fisso il punto che ha la coordinata $x = 2$ e trovare la caratteristica di φ.

4. (a) Determinare punti uniti e rette unite nella proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ associata alla matrice

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Studiare l'affinità che è la restrizione della precedente proiettività al sottoinsieme definito dalla condizione $x_3 \neq 0$, verificando, a conferma di quanto ottenuto in (a), che questa affinità tiene unite le rette di un fascio.

(c) Stabilire se l'affinità studiata in (b) sia una similitudine oppure un'isometria e verificare i risultati ottenuti determinando l'immagine di una circonferenza, con centro in $(1,-1)$ e raggio r fissato.

5. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia F la famiglia di tutte le coniche per le quali il triangolo fondamentale, di vertici $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, è un triangolo autopolare, e che passano per il punto $W = [-2,1,0]$.

   i. Si rappresenti F con un'equazione.
   ii. Si verifichi che F contiene due sole coniche specializzate, e si stabilisca se esse sono proiettivamente equivalenti.
   iii. Verificare che, nel piano affine che si ottiene prendendo la retta $x_3 = 0$ come retta impropria, le coniche le cui chiusure proiettive sono in F hanno tutte lo stesso centro e gli stessi asintoti.
   iv. Determinare tali asintoti.