Geometria euclidea, affine e proiettiva

Prova scritta del 9 luglio 2009

Tempo a disposizione: 3 ore. Si possono consultare gli appunti e il libro di testo.

1. a) Rappresentare con equazioni cartesiane il sottospazio S di $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ generato dai punti

$$[1,0,0,-1,0], [0,0,3,0,0], [0,2,0,0,0].$$

b) Sia T l'iperpiano di $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ di equazione $x_1 + x_3 - x_5 = 0$. Trovare delle equazioni cartesiane, la dimensione, e delle equazioni parametriche del sottospazio proiettivo $T \cap S$.

2. Enunciare la proposizione duale della seguente: nello spazio $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$, un piano ed un sottospazio di dimensione tre, che siano in posizione generale, hanno come intersezione un punto.
Dimostrare una delle due proposizioni.

3. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ sono dati i punti A, B, C di coordinate affini, rispettivamente, 2, 0, 4.
Scrivere un'equazione che rappresenti la proiettività α determinata dalle condizioni:

$$\alpha(A) = B, \alpha(B) = A, \alpha(C) = \infty.$$

Determinare i punti uniti e la caratteristica di α.

4. Studiare la proiettività θ: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazioni:

$$\rho \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

determinando tutti i suoi punti uniti e le sue rette unite.
Verificare che θ induce un'affinità sul piano affine identificato con l'insieme complementare della retta $x_3 = 0$; stabilire se questa affinità è un'isometria, e confermare la propria conclusione trovando l'immagine del parallelogrammo di vertici (0,0), (1,0), (1,1), (0,1).

5. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, è data la conica $\mathscr{C}$ di equazione

$$x_1 x_2 - x_2 x_3 + x_3^2 = 0.$$

a) Verificare che i punti [2,1,0], [1,0,1], [2,–1,0] sono vertici di un triangolo autopolare rispetto a $\mathscr{C}$.
b) Nel piano affine che si ottiene prendendo la retta $x_3 = 0$ come retta impropria, studiare la conica $\mathscr{C}^*$ la cui chiusura proiettiva è $\mathscr{C}$, determinandone in particolare il centro e gli eventuali asintoti (suggerimento: si possono evitare alcuni calcoli, utilizzando la prima parte dell'esercizio).