

Programma svolto nel corso di **Geometria euclidea, affine e proiettiva**, dell'anno accademico 2008-09, II anno, I trimestre (6 ottobre – 6 dicembre 2008)

1. Il Programma di Erlangen. La nascita della geometria proiettiva.

Gruppi di trasformazioni di uno spazio; invarianti rispetto ad un gruppo.

Le operazioni di proiezione e sezione, le corrispondenze tra piani ottenute per proiezioni e sezioni, rette limite. Le proiezioni e sezioni conservano l'allineamento, ma non il parallelismo né i rapporti tra segmenti. Ampliamento del piano e dello spazio con l'introduzione degli elementi impropri. Le proprietà grafiche. La geometria proiettiva sintetica fondata sugli assiomi grafici. La legge di dualità. Il birapporto di quattro punti, invarianza per proiezione e sezioni.

Coordinate cartesiane omogenee nel piano, equazione omogenea di una retta, equazione della retta impropria.

Coordinate omogenee nello spazio, equazione del piano improprio, luoghi improprio di rette e di piani.

2. Lo spazio proiettivo.

Lo spazio proiettivo di dimensione n , sistemi di coordinate proiettive.

Sottospazi proiettivi, dipendenza lineare nello spazio proiettivo, la formula di Grassmann, sottospazi in posizione generale, sistemi di riferimento, cambiamenti di coordinate proiettive. Coordinate sui sottospazi proiettivi.

Lo spazio proiettivo duale e il principio di dualità.

3. La retta proiettiva.

Il birapporto e le sue proprietà. Il rapporto semplice.

Proiettività sulla retta. Teorema fondamentale delle proiettività di P^1 . Classificazione delle proiettività sulla retta, caratteristica di una proiettività iperbolica. Involuzioni. Corrispondenze algebriche e proiettività.

Forme di prima specie, proiettività tra forme di prima specie; birapporti nei fasci di rette, di piani.

Immersione della retta affine nella proiettiva. Affinità sulla retta, generazione delle proiettività di P^1 per composizione di traslazioni, omotetie, inversioni. Definizione di punto medio attraverso un birapporto armonico.

4. Proiettività del piano.

Collineazioni o proiettività del piano; proiettività duale di una proiettività piana. Teorema fondamentale delle proiettività piane.

Proprietà armonica del quadrangolo piano completo, teorema di Desargues.

Prospettività tra rette nel piano, proiettività tra rette come prodotto di prospettività, asse di collineazione. Il teorema di Pappo. Il teorema di Desargues sui triangoli prospettivi.

Classificazione delle proiettività del piano reale.

L'omologia nel piano. Elementi che determinano un'omologia, uso dell'omologia nella prospettiva.

Immersione del piano affine nel piano proiettivo. Affinità, traslazioni, omotetie. Similitudini, isometrie. Classificazione delle isometrie piane. Invarianti proiettivi, affini, metrici; la geometria affine e la geometria euclidea come sottogeometrie della geometria proiettiva.

5. Polarità e coniche.

La polarità, la legge di reciprocità, la conica associata ad una polarità, coniche non degeneri, coniche semplicemente e doppiamente degeneri. Intersezioni di una conica con una retta, retta tangente, punti doppi e componenti di una conica degeneri. L'involuzione dei punti coniugati su una retta, proprietà armonica della polare.

Triangoli autopolari e classificazione proiettiva reale delle coniche.

Centro, diametri, involuzione dei diametri coniugati, asintoti, classificazione affine delle coniche. Proprietà di simmetria delle coniche affini. Coniche equivalenti rispetto ad isometrie, assi di una conica.

Tutti gli argomenti trattati e gli esercizi proposti si trovano o nel testo:

Beltrametti, Carletti, Gallarati, Monti Bragadin, *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, Bollati Boringhieri, Torino, 2002

oppure negli appunti reperibili in rete

http://www.mat.unical.it/~dapri/materiali/geo_eap0809/geap0809.htm