Geometria euclidea, affine e proiettiva
9 dicembre 2008

Traccia di soluzione del facsimile di prova d'esame.

1. Nello spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ sono assegnati i punti

$$L = [1,0,2,1,0],\ M = [2,0,0,2,0],\ N = [3,0,2,3,0],\ P = [-1,0,0,1,1].$$

(a) Determinare la dimensione del sottospazio proiettivo S generato da L, M, N, P e scriverne delle equazioni parametriche e delle equazioni implicite (cartesiane).
(b) Scrivere delle equazioni cartesiane che individuino un sottospazio proiettivo complementare di S.

a) Riducendo a scalini la matrice che ha come righe (o colonne) i vettori delle coordinate dei punti L,M,N,P ,si trova che il suo rango è 3, quindi solo tre dei punti sono linearmente indipendenti. La dimensione del sottospazio proiettivo S è 2. Scegliendo come generatori i punti indipendenti L,M,P si ottengono le equazioni parametriche di S

$$\left(\lambda+\mu-\nu, 0, 2\lambda, \lambda+\mu+\nu, \nu\right)$$

nei parametri λ,μ,ν.
S si può rappresentare come intersezione di due iperpiani, con il sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

b) Sia t la dimensione di un sottospazio T complementare di S. Per definizione di spazio complementare, lo spazio intersezione di T e S è vuoto, lo spazio congiungente è lo spazio ambiente, quindi dalla formula di Grassman segue che

$$t + 2 = 4 - 1.$$

Per individuare una retta T che sia complementare di S occorre scegliere due generatori che siano linearmente indipendenti rispetto ai generatori di S o, equivalentemente, intersecare tre iperpiani che non contengano S; ad esempio

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

2. (a) Scrivere la proposizione duale della seguente:
"dati nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ due rette r, s sghembe tra loro ed un punto P, che non appartiene né a r né a s, se i due piani, che sono determinati da P e da ciascuna delle rette, si intersecano soltanto in P, allora P e il sottospazio $J(r,s)$, congiungente delle rette, sono complementari."
(b) Dimostrare o la proposizione precedente oppure la duale.

(a) Dati nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ due piani R, S, il cui spazio congiungente sia $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, ed un iperpiano p, che non contenga né R, né S, se le due rette, che sono le intersezioni di p con ciascuno dei due piani, hanno come spazio congiungente proprio p, allora p e il punto $R \cap S$ sono complementari.
(b) Per dimostrare la proposizione data, dall'ipotesi che i due piani J(r,P) e J(s,P) abbiano come intersezione il sottospazio 0-dimensionale P si trae che il loro spazio congiungente J(J(rP),J(s,P)) è lo spazio ambiente. Poiché J(J(r,P),J(s,P))= J(P,J(r,s)), e J(r,s) è 3-dimensionale, si ricava dalla formula di Grassmann che $P \cap J(r,s) = \emptyset$ e quindi la tesi..

3. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i fasci di rette Φ, con centro in [0,0,1], e Φ', con centro in [2,2,1]. Siano:
a la retta di equazione $x_1 + 2x_2 = 0$, b la retta $2x_1 + x_2 = 0$, c la retta $x_2 = 0$,
a' la retta $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$, b' la retta $2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$, c' la retta $-x_2 + 2x_3 = 0$.

Si scelgano dei sistemi di coordinate proiettive nei fasci Φ, Φ' e si rappresenti, in quelle coordinate, la proiettività α: Φ → Φ' determinata dalle condizioni:

α(*a*)= *a'* , α(*b*)= *b'*, α(*c*)= *c'* .

Le rette del fascio Φ hanno equazioni $u_1x_1 + u_2x_2 = 0$*. I parametri* u_1 *e* u_2 *sono coordinate proiettive omogenee nel fascio; la retta a ha le coordinate* $[u_1, u_2] = [1, 2]$*, la retta b ha coordinate* $[u_1, u_2] = [2,1]$*, c è data da* $[u_1, u_2] = [0,1]$.

Le rette del fascio Φ' hanno equazioni $v_1(x_1 - 2x_3) + v_2(x_2 - 2x_3) = 0$*; prese* v_1 *e* v_2 *come coordinate omogenee, la retta a' corrisponde a* $[v_1, v_2] = [1, -2]$*, b' si ottiene per* $[v_1, v_2] = [2, -1]$*, c' per* $[v_1, v_2] = [0, -1]$.

Se si prende come coordinata non omogenea nella forma di prima specie Φ il rapporto $x = u_1/u_2$ *e in Φ' il rapporto* $x' = v_1/v_2$ *, allora la proiettività α manda i punti di coordinate* ½, 2, 0 *rispettivamente nei punti* −1/2, − 2, 0; *α ha quindi equazione*

$$x' = -x\,.$$

4. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si considerino i fasci di rette Φ, con centro in *A* = [0,0,1], Φ', con centro in *B* = [2,2,1], e la proiettività α: Φ → Φ' che alla retta di equazione $\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$ fa corrispondere la retta di equazione $\lambda'(x_1-2x_3) + \mu'(x_2-2x_3) = 0$ tale che sia

$$\lambda'\mu + \lambda\mu' = 0.$$

Per ogni retta $r \in \Phi$, sia *P* il punto di intersezione di *r* con α(*r*).

a) Determinare un'equazione del luogo $\mathcal{C}$ descritto dal punto *P* al variare della retta *r*.

b) Studiare $\mathcal{C}$; verificare che $\mathcal{C}$ contiene i punti *A*, *B* e che, detta *s* la retta congiungente *A*, *B* , la retta α(*s*) è tangente a $\mathcal{C}$.

c) Studiare la curva affine di cui $\mathcal{C}$ è la chiusura proiettiva, determinandone il tipo, l'eventuale centro, gli eventuali asintoti.

a) P ha coordinate che sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \lambda x_1 + \mu x_2 = 0 \\ -\lambda(x_1 - 2x_3) + \mu(x_2 - 2x_3) = 0 \end{cases}$$

per ogni valore dei parametri λ,μ; le sue coordinate soddisfano l'equazione

$$-\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2 - 2x_3}{x_1 - 2x_3}\text{, ovvero}$$

$$x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 = 0.$$

b) Il luogo $\mathcal{C}$ *è una conica non degenere, che passa per A e B. La retta s, di A e B, ha equazione* $x_1 - x_2 = 0$*; è quindi l'elemento di coordinate* $\lambda = 1$*,* $\mu = -1$ *nella forma di prima specie Φ. L'elemento che è la sua immagine nella proiettività α ha le coordinate* $[\lambda', \mu'] = [1,1]$*, cioè è la retta di equazione* $x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$*. Per verificare che questa retta è la polare del punto B, ed è quindi tangente alla conica, calcoliamo le coordinate duali della polare di B:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

c) Passando a coordinate non omogenee, si trova l'equazione $xy - x - y = 0$*, che rappresenta un'iperbole; il suo centro è* $(1,1)$*; gli asintoti, cioè le polari dei punti in cui la conica* $\mathcal{C}$ *interseca la retta* $x_3 = 0$*, sono le rette di equazioni, rispettivamente,* $x = 1, y = 1$.

5. (a) Determinare punti uniti e rette unite nella proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ associata alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Studiare l'affinità che è la restrizione della precedente proiettività al sottoinsieme definito dalla condizione $x_3 \neq 0$, verificando, a conferma di quanto ottenuto in (a), che questa affinità tiene unite le rette di un fascio.
(c) Stabilire se l'affinità studiata in (b) sia una similitudine oppure un'isometria e verificare i risultati ottenuti considerando l'immagine del quadrangolo di vertici (0,0), (−1,−4), (2,−4), (3,0).

(a) La matrice M ha un solo autovalore, 2*, con molteplicità algebrica uguale a 3. L'autospazio associato è determinato dal sistema omogeneo*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0;$$

L'autovalore ha quindi molteplicità geometrica uguale a 2; sono uniti tutti i punti della retta di equazione $x_3 = 0$*. La proiettività è una omologia speciale, in cui sono unite le rette di un fascio, con centro sulla retta dei punti uniti. Per trovare le rette unite, consideriamo l'autospazio della matrice trasposta, relativo allo stesso autovalore:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Le rette unite sono le rette le cui coordinate duali soddisfano l'equazione $u_1 + 4u_2 = 0$*; che definisce il fascio con centro nel punto* $[1,4,0]$.
(b) L'affinità, indotta dalla proiettività sull'insieme complementare della retta $x_3 = 0$*, ha le equazioni* $x' = x + \frac{1}{2}, y' = y + 2$. *E' la traslazione di vettore* (1/2,2), *nella quale nessun punto è unito, ma sono unite le rette con la direzione di questo vettore, cioè le rette passanti per il punto improprio* $[1,4,0]$. *Infatti, se nell'equazione di una retta di questo fascio*

$$4x - y + k = 0$$

si pone $x = x' - 1/2, y = y' - 2$ *si ottiene* $4x' - y' + k = 0$.
(c) Una traslazione è una isometria diretta. Il quadrilatero dato è un parallelogrammo con due lati paralleli all'asse delle x *e gli altri con direzione*$[1,4,0]$; *viene trasformato nel parallelogrammo con vertici* (1/2,2), (−1/2,−2), (5/2,−2), (7/2,2), *i cui lati hanno le stesse direzioni dei lati del parallelogrammo dato ed hanno le stesse lunghezze di quelli..*

6. Dimostrare che, dati una conica Q non degenere ed un punto P che non le appartiene, se la polare di P interseca Q nei punti M, N, questi sono i punti di contatto delle tangenti condotte da P a Q .
Per la legge di dualità, P appartiene alla polare di M. La polare di un punto della conica è la tangente in quel punto, quindi la retta PM è tangente alla conica.